

Feuille 1

ALGÈBRE LINÉAIRE

1- Produit matriciel

- 1) Donner la définition d'un espace vectoriel, d'un anneau, d'une algèbre.
- 2) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. A quelle condition sur m, n, p, q peut-on définir le produit AB ?
- 3) Montrer que le produit matriciel n'est pas commutatif dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.
- 4) Une matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ peut être considérée de deux façons:
 - La concaténation de ses colonnes

$$A = \text{col}(r_1, r_2, \dots, r_m) \quad (1)$$

- La concaténation de ses lignes

$$A = \text{lig} \begin{pmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_n^T \end{pmatrix} \quad (2)$$

NB: $r_j \in \mathbb{R}^m$, $l_i \in \mathbb{R}^n$ désignent des vecteurs colonne.

Vérifier les affirmations suivantes:

1. Si r_j est la j -ème colonne de la matrice B , alors la j -ème colonne du produit AB est Ar_j .
2. Si l_i^T est la i -ème ligne de la matrice A , alors la i -ème ligne du produit AB est $l_i^T B$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, Ax est la combinaison linéaire des colonnes de A avec pour coefficients les composantes de x .
4. Pour $y \in \mathbb{R}^m$, $y^T A$ est la combinaison linéaire des lignes de A avec pour coefficients les composantes de y .

2- Transposition

- 1) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Rappeler la définition de la matrice transposée A^T . De même rappeler la définition de A^* pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- 2) Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$.
- 3) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Quelles est la dimension des matrices $x^T y$ et xy^T ? . Donner leur coefficients.
- 4) Soit $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice

$$A = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i x_i^T \quad (3)$$

est symétrique.

5) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B symétrique et C antisymétrique tel que $A = B + C$.

3- Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On appelle $\mathcal{C}(A)$, le sous-espace de \mathbb{R}^m engendré par les colonnes de A . De même, on appelle $\mathcal{L}(A)$ le sous-espace de \mathbb{R}^n engendré par les lignes de A . Le rang de A , noté $\text{rg}(A)$ est

$$\text{rg}(A) = \dim(\mathcal{C}(A)) \quad (4)$$

1) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$ si et seulement si il existe une matrice $F \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $B = AF$. De même, pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{M}_{q,n}(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{L}(C) \subset \mathcal{L}(A)$ si et seulement si il existe une matrice $L \in \mathbb{M}_{q,m}(\mathbb{R})$ tel que $C = LA$.

2) On veut montrer le résultat suivant,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T) \quad (5)$$

Soit $c = \text{rg}(A)$ et $l = \text{rg}(A^T)$ (rang "en colonnes" et rang "en lignes"). Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathbb{M}_{n,c}(\mathbb{R})$ et une matrice $L \in \mathbb{M}_{c,p}(\mathbb{R})$ tel que $A = BL$. De même, montrer qu'il existe une matrice $K \in \mathbb{M}_{m,l}(\mathbb{R})$ et une matrice $T \in \mathbb{M}_{l,n}(\mathbb{R})$ tel que $A = KT$.

3) Montrer que $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{L}(L)$. De même, montrer que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(K)$.

4) En déduire que

$$l \leq \dim(\mathcal{L}(L)) \leq c, \text{ et que } c \leq \dim(\mathcal{C}(K)) \leq l \quad (6)$$

et en conclure le résultat.

5) Montrer les relations suivantes,

$$\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A) \quad (7)$$

$$\text{rg}(A + B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) \quad (8)$$

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)) \quad (9)$$

4- Trace d'une matrice

La trace d'une matrice carrée $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (10)$$

1) Montrer que pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on a

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (11)$$

2) Montrer que pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}), A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}), C \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB) \quad (12)$$

A-t-on également $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC)$?

3) montrer que si A, B, C sont symétriques, alors

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BAC) \quad (13)$$

3) Quelle est la généralisation de (12) à un produit de k matrices ?

4) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \quad (14)$$

En déduire que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = 0$ si et seulement si $A^T A = 0$.

5) Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, tel que $A^T A = A^2$. Montrer que

$$\text{tr}((A - A^T)^T(A - A^T)) = 0 \quad (15)$$

et en déduire que A est symétrique.

5- Déterminant d'une matrice

Soit A une matrice carrée $n \times n$ réelle.

1) Rappeler la définition du déterminant de A . Quelles sont les principales propriétés de l'application "déterminant" ?

2) On suppose que $\det(A) = 0$. Est-il possible que toutes les valeurs propres de A soient strictement positives ?

3) On suppose que toutes les valeurs propres de A sont non nulles. Est-ce que A est inversible ?

4) Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$ et B la matrice $(n+1) \times (n+1)$ déduite de A par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b^T \\ a & A \end{pmatrix} \quad (16)$$

Montrer que

$$\det(B) = \det(A - ab^T) \quad (17)$$

et que si de plus A est inversible,

$$\det(B) = \det(A)(1 - b^T A^{-1}a) \quad (18)$$

5) On rappelle le résultat suivant. Soit A_1, A_2 les deux matrices partitionnées

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} C & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad (19)$$

On a (résulte de la définition du déterminant)

$$\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A) \det(C) \quad (20)$$

Soit A une matrice carrée écrite sous forme partitionnée

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (21)$$

On suppose que la matrice A_{11} est inversible. Montrer que

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \quad (22)$$