Université Paul Verlaine-Metz - UFR MIM **Année 2011/2012**
Préparation à l'agrégation interne de mathématique
Module *Algèbre linéaire*

Feuille 2

Algèbre linéaire

1- Normes matricielles
1) Pour $\|x\|$, norme sur $\mathbb{R}^n$ fixée, on définit la norme matricielle *subordonnée* sur $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{1}$$

On note $\|A\|_1$,$\|A\|_\infty$,$\|A\|_2$ les normes matricielles subordonnées aux normes

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \tag{2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{3}$$

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \tag{4}$$

Montrer que pour chacune de ces normes matricielles on a

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \tag{5}$$

(Noter que les trois normes qui interviennent dans (5) portent en général sur des espaces différents !).
3) Soit la norme matricielle

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}|. \tag{6}$$

Montrer que cette norme ne vérifie pas (5). On pourra considérer les matrices A et B données par

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

4) On définit la norme de Frobenius sur $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2)^{1/2} \tag{8}$$

Vérifier les relations suivantes

1. $$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \tag{9}$$

2. $$\max_{i,j} |a_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\max_{i,j} |a_{i,j}| \tag{10}$$

3. $$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \tag{11}$$

4.
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \tag{12}$$

5.
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty \tag{13}$$

6.
$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1 \tag{14}$$

2- Trace, norme de Frobenius, valeurs singulières

On considère l'espace $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels. Pour $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note
$$A \bullet B = \mathrm{tr}(AB^T). \tag{15}$$
1) Vérifier que
$$A \bullet B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{i,j}. \tag{16}$$
2) Montrer que $A \bullet B$ est un produit scalaire sur $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On note $\|A\|_F$ la norme associée.
3) Vérifier que l'on a
$$A = 0 \text{ si et seulement si } AA^T = 0 \tag{17}$$
4) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique de valeurs propres (réelles) $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$. Montrer que
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \tag{18}$$
5) Rappeler le théorème de decomposition en valeurs singulières pour une matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
6) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Exprimer $\|A\|_F$ à l'aide des valeurs singulières de A.
7) Rappeler la définition de la norme euclidienne $\|A\|_2$ d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
8) Vérifier que
$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2 \tag{19}$$
Préciser les cas d'égalité dans les inégalités.

3- Représentation de la trace

On note ψ l'application définie sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$\psi(X, Y) = \mathrm{tr}(XY) \tag{20}$$
1) Montrer que ψ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
2) Démontrer que si $(X_1, X_2, \cdots, X_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une autre base $(X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n^2})$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour $1 \le i, j \le n^2$ on ait
$$\psi(X_i, X'_j) = \delta_{i,j}, \quad \text{symbole de Kronecker} \tag{21}$$
3) Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on a
$$\sum_{1\le i\le n^2} X_i A X'_i = \mathrm{tr}(A) Id_{n\times n} \tag{22}$$
où $Id_{n\times n}$ désigne la matrice identité $n \times n$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

(*D'après épreuve 1, agrégation interne 2008*).