

Feuille 4

ALGÈBRE LINÉAIRE

1- Théorème de Courant-Fischer

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. le *quotient de Rayleigh* de A appliqué au vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ est

$$R_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \quad (1)$$

Considérons le cas où la matrice A est symétrique. Il n'y a en général aucune méthode simple pour déterminer les valeurs propres de A . Ceci est naturellement particulièrement vrai quand n est grand. Donc tout renseignement sur les valeurs propres de A , même de nature qualitative est intéressant. Un résultat en ce sens est l'identification suivante des valeurs propres de la matrice A , par la formule du *minimax*.

On note les valeurs propres de A sous la forme

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \dots \leq \lambda_1(A) \quad (2)$$

Alors la valeur propre $\lambda_k(A)$ s'écrit

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim(S)=k} \min_{x \in S, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad (\text{formule du minimax}) . \quad (3)$$

1) On suppose $k = 1$. Vérifier que (3) devient

$$\lambda_1(A) = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} . \quad (4)$$

Montrer (3) dans ce cas particulier.

2) On suppose $k = n$. Vérifier que (3) devient

$$\lambda_n(A) = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} . \quad (5)$$

Montrer (3) dans ce cas particulier.

3) Montrer le résultat (3) dans le cas général (cf notes de cours, chap. II).

2- Spectre de graphes, théorème de Courant-Fischer pour les graphes

Un graphe G consiste en la donnée d'un ensemble de $n \geq 2$ sommets notés $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$, et d'un ensemble d'arêtes \mathcal{A} . L'ensemble \mathcal{A} consiste en un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}_2(n)$ des paires $\{i, j\}$ de points du graphe G .

On note m le nombre d'arêtes et $\mathcal{A} = a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m$. Pour chaque point i du graphe, $1 \leq i \leq n$, on note d_i son degré, c'est-à-dire le nombre de voisins de i . On note également

$$D = \sum_{1 \leq i \leq n} d_i \quad (6)$$

On note de plus $\phi_1 \in \mathbb{R}^n$ le vecteur défini par, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\phi_1(k) = \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}}. \quad (7)$$

On note $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice symétrique définie par

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, & \text{si } i \neq j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (8)$$

On appelle également \mathcal{L} l'endomorphisme de \mathbb{R}^n dont L est la matrice dans la base canonique. On note enfin

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (9)$$

les valeurs propres de L .

1) Démontrer, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a:

$$\langle \mathcal{L}x; x \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \simeq i} \left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \quad (10)$$

et

$$\langle \mathcal{L}x; x \rangle = \sum_{a \in \mathcal{A}, a = \{i,j\}} \left(\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \quad (11)$$

(NB: On note $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire de \mathbb{R}^n).

2) Soit $a(x, y)$ une forme bilinéaire positive sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Rappeler la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle \mathcal{L}x, y \rangle^2 \leq \langle \mathcal{L}x, x \rangle \cdot \langle \mathcal{L}y, y \rangle \quad (12)$$

3) En déduire que les valeurs propres de \mathcal{L} sont positives ou nulles, que le noyau de \mathcal{L} contient le vecteur ϕ_1 et que $\lambda_1 = 0$.

On introduit les notions de *chemin*, *composante connexe* et *connexité* d'un graphe.

- Soient i et j deux sommets du graphe G et $p \geq 2$ un entier. Un chemin de longueur p reliant i et j est une suite de sommets $(s_1, s_2, \dots, s_{p+1})$ telle que $s_1 = i$, $s_{p+1} = j$, et pour tout entier $1 \leq k \leq p$, $\{k, k+1\}$ est une arête, c'est-à-dire $\{s_k, s_{k+1}\} \in \mathcal{A}$.

- On admettra que pour tout graphe G , l'ensemble de ses n sommets peut être partitionné en un certain nombre de sous-ensembles $\{J_1, J_2, \dots, J_r\}$, appelés composantes connexes du graphe et vérifiant
 - pour tout $1 \leq k \leq r$, deux éléments de J_k peuvent être reliés par un chemin
 - pour $k, l \in \{1, \dots, r\}$, distincts de $\{1, \dots, r\}$, aucun élément de J_k ne peut être relié à un élément de J_l .
- G est dit connexe lorsque $r = 1$, c'est-à-dire lorsque G possède une seule composant connexe.

On souhaite démontrer l'équivalence suivante :

$$G \text{ est connexe} \iff \lambda_2 > 0 \quad (13)$$

4) Préciser la valeur de r et des composantes connexes $\{J_1, J_2, \dots, J_r\}$ pour le graphe à 7 sommets dont les arêtes sont

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\} \quad (14)$$

5) On revient au cas général. Démontrer que λ_2 est strictement positive si, et seulement si, $\text{Ker } \mathcal{L}$ est la droite engendrée par ϕ_1 . (Indication: on pourra considérer l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_1).

6) Soit un vecteur $x \in \text{Ker } \mathcal{L}$. Démontrer que pour tous sommets i, j reliés par un chemin on a

$$\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} = \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}. \quad (15)$$

7) Démontrer le sens direct de l'implication (13).

8) Démontrer que si G n'est pas connexe on peut construire deux vecteurs de $\text{Ker } \mathcal{L}$ non colinéaires. En déduire l'équivalence (13).

9) Soit (ϕ_1, \dots, ϕ_n) une base orthonormale de \mathbb{R}^n (ϕ_1 étant le vecteur défini à la question 3)). et telle que

$$\mathcal{L}\phi_i = \lambda_i\phi_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (16)$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, non nul,

$$\frac{\langle \mathcal{L}x, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \phi_i, x \rangle^2}{\sum_{i=1}^n \langle \phi_i, x \rangle^2}. \quad (17)$$

10) Démontrer les formules du minimax suivantes:

$$\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\langle \mathcal{L}x, x \rangle}{\|x\|^2} \quad (18)$$

et que

$$\lambda_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \langle x, \phi_1 \rangle = 0} \frac{\langle \mathcal{L}x, x \rangle}{\|x\|^2}. \quad (19)$$

11) Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée symétrique réelle positive d'ordre n . Pour tout $1 \leq p \leq n$, on considère la matrice $H_p \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ définie par

$$H_p = (h_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}. \quad (20)$$

Montrer que H_p est également symétrique positive. Vérifier de plus que si α et α_p sont les plus grandes valeurs propres de H et H_p , on a $\alpha \geq \alpha_p$.

12) Soit $\phi \in \mathbb{R}^n$, non nul et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H = \phi\phi^T \quad (21)$$

Vérifier que H admet pour valeurs propres 0 et $\|\phi\|^2$ et préciser les ordres de multiplicité de ces deux valeurs propres.

13) Soit G un graphe à n sommets et les nombres d_i associés. Le nombre D est défini en (??). La plus grande valeur propre de L est λ_n . Soit $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définies par

$$M = (\sqrt{d_i d_j})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad N = L - I_n + \frac{\lambda_n}{D} M \quad (22)$$

Montrer que $M = D\phi_1\phi_1^T$, où ϕ_1 est défini en (7). En déduire que tous les vecteurs propres de L sont aussi des vecteurs propres de M .

14) Montrer que la plus grande valeur propre de N est $\lambda_n - 1$.

(D'après épreuve 1, agrégation interne 2011).

3- Matrices symétriques et formes quadratiques

1) Rappeler le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.

2) Soit A une matrice symétrique définie positive, qui s'écrit

$$A = P\Lambda P^T \quad (23)$$

avec P matrice orthogonale et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Exprimer A^{-1} en fonction de P et Λ .

3) Comment définir $A^{1/2}$?

4) Rappeler le lien entre matrices carrées symétriques $n \times n$ et formes quadratiques sur \mathbb{R}^n .

5) Montrer que pour toute forme quadratique q sur \mathbb{R}^n , il existe une base orthonormée e'_i dans laquelle q s'exprime par

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \quad (24)$$

où y_i désigne les coordonnées du vecteur x dans la base e'_i .

6) Soit A et B deux matrices $n \times n$, A symétrique et B symétrique définie positive. Montrer que le maximum de $x^T A x$ sous la contrainte $x^T B x = 1$ est donné par la plus grande valeur propre de $B^{-1}A$. De plus, le vecteur qui réalise le maximum est un vecteur propre associé à cette plus grande valeur propre.

4- Valeurs singulières et norme 2 matricielle

1) Rappeler le théorème de décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

2) Démontrer que la norme matricielle $\|A\|_2$ coïncide avec la plus grande valeur singulière de A . Autrement dit: pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il existe un vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|z\|_2 = 1$ avec

$$A^T A z = \mu^2 z \quad (25)$$

où $\mu = \|A\|_2$.

3) Montrer qu'une majoration de $\|A\|_2$ est

$$\|A\|_2 \leq (\|A\|_1 \|A\|_\infty)^{1/2} \quad (26)$$

5- Valeurs singulières et valeurs propres

Soit X une matrice $n \times p$, (par exemple une matrice de données correspondant à un échantillon de n observations avec p caractères.). Soit r le rang de X . Montrer que pour tout $k \leq r$, la valeur propre numéro k des matrices $X^T X$ et $X X^T$ sont les mêmes. On ordonne les valeurs propres sous la forme

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \quad (27)$$

Montrer que l'on passe des vecteurs propres $u_k \in \mathbb{R}^p$ de XX^T à ceux v_k de $X^T X$ correspondant à la valeur propre λ_k par

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X u_k \quad (28)$$

et

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X^T v_k \quad (29)$$