Université Paul Verlaine-Metz - UFR MIM **Année 2011/2012**
Préparation à l'agrégation interne de mathématique
Module *Algèbre linéaire*

Feuille 5

Algèbre linéaire

1- Suites récurrentes et polynôme minimal

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$. On appelle *récurrente linéaire* une suite $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par une relation de récurrence linéaire de la forme

$$q_0 u_{n+r} + q_1 u_{n+r-1} + \cdots + q_{r-1}u_{n+1} + q_r u_n = 0 \tag{1}$$

où $q_0, q_1, \cdots q_r \in \mathbb{R}$, $q_0 \neq 0$. On note σ l'opérateur de shift positif défini par

$$(\sigma u)_n = u_{n+1} \tag{2}$$

Si $P(X) \in [X]$, l'opérateur $P(\sigma)$ est défini par

$$P(\sigma) = p_0 Id + p - 1\sigma + p - 2\sigma^2 + \cdots + p_r\sigma^r \tag{3}$$

Noter que pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$PQ(\sigma) = P(\sigma) \circ Q(\sigma) = Q(\sigma) \circ P(\sigma) \tag{4}$$

1) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{r} p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $[P(\sigma)(u)]_n$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(E)$.
a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire récurrente si et seulement si son annulateur $Ann(u) \neq 0$. On appelle *annulateur* d'une suite u, l'ensemble des polynômes $p \in \mathbb{R}[X]$ tels que $p(\sigma)(u)$ est la suite nulle.
b) Démontrer que si u est linéaire récurrente, alors il existe un unique polynôme normalisé noté π_u tel que $Ann(u) = \pi_u \cdot K[X]$.
On appelle π_u le *polynôme minimal* de la suite (u_n).
3) a) Démontrer que la suite $u_n = 2^n + 3^n$ est linéaire récurrente. Donner son polynôme minimal.
b) Démontrer que la suite $u_n = n^2 2^n$ est linéaire récurrente et donner son polynôme minimal.
c) Est-ce que la suite $u_n = (n!)$ est linéaire récurrente ?
4) Soit $T \in L(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(E)$ (à valeurs deans E), on note $T(u)$ la suite de F définie par

$$T(u)_n = T(u_n), \quad n \geq 0. \tag{5}$$

Démontrer que si u est linéaire récurrente, il en est de même de la suite $T(u)$. Montrer que le polynôme minimal $\pi_{T(u)}$ divise le polynôme $\pi_{T(u)}$.

5) Le sous-ensemble $\mathcal{R}(E) \subset \mathcal{S}(E)$ des suites linéaires récurrentes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$?
6) Soit A une matrice réelle $p \times p$ et $V, W \in \mathbb{R}^p$, non nuls. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ls suite définie par

$$u_n = W^T A^n V \tag{6}$$

a) Montrer que la suite matricielle $(A^n)_{n\geq 0}$ est linéaire récurrente (à valeurs matrices) et que son polynôme minimal est le polynôme minimal π_A de la matrice A.
b) Vérifier que les suites $\beta_n = (A^n V), n \geq 0$ et $u_n, n \geq 0$ sont linéaires récurrentes et que

$$\pi_u | \pi_\beta, \quad \text{et } \pi_\beta | \pi_A \tag{7}$$

c) On note $\pi_{A,V,W} := \pi_u$. Donner un majorant du degré de $\pi_{W,A,V}$.
d) On note $\pi_{A,V} := \pi_\beta$. Que peut-on dire de $\pi_{W,A,V}$, $\pi_{A,V}$, π_A lorsque $\pi_{W,A,V}$ est nul ? 7) Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on note $H_m(u) \in \mathbb{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$H_m(u)_{i,j} = u_{i+j-2}, \;\; 1 \leq i, j \leq m+1. \tag{8}$$

On note son déterminant $D_m(u)$. On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0, \; u_1 = 1, \; u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \;\; 1 \leq i, j \leq m+1 \tag{9}$$

Calculer $D_m(u)$ pour tout $m \geq 0$. Donner le polynôme minimal de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
8) On suppose que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u(X) = X^s + q_1 X^{s-1} + \cdots + q_{s-1} X + q_s \tag{10}$$

Démontrer que pour tout entier $m \geq s$, $D_m(u) = 0$.
9) Réciproquement soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle il existe un entier $s \geq 1$ vérifiant

$$D_{s-1}(u) \neq 0 \text{ et } D_m(u) = 0 \text{ pour tout } m \geq s \tag{11}$$

On souhaite prouver que u est linéaire récurrente et calculer son polynôme minimal.
a) Quel est le rang de la matrice $H_s(u)$?
b) Démontrer qu'il existe un unique s-uplet $(q_1, q_2, \cdots, q_s) \in \mathbb{R}^s$ tel que :

$$H_s(u). \begin{bmatrix} q_s \\ q_{s-1} \\ \vdots \\ q_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

c) On pose, pour tout entier $m \geq s$:

$$\lambda_m = u_m + q_1 u_{m-1} + \cdots + q_{s-1} u_{m-s+1} + q_s u_{m-s}. \tag{13}$$

Que vaut λ_m lorsque m appartient à l'intervalle $[s, 2s]$?
d) Démontrer que

$$D_{s+1}(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s-1} & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_s & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{s-1} & u_s & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 \\ u_s & u_{s+1} & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \lambda_{2s+1} \\ u_{s+1} & u_{s+2} & \cdots & u_{2s} & \lambda_{2s+1} & \lambda_{2s+2} \end{vmatrix} \tag{14}$$

En déduire que $\lambda_{2s+1} = 0$.
e) Plus généralement, soit $m \geq s+1$ pour lequel

$$\lambda_s = \lambda_{s+1} = \cdots = \lambda_{2s} = \cdots = \lambda_{m+s-1} = 0 \tag{15}$$

Démontrer que

$$D_m(u) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{s+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1} & \cdots & \cdots & u_{2s-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_s & \cdots & \cdots & u_{2s-1} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{m+s} \\ \vdots & & & \vdots & 0 & & \iddots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \lambda_{m+s} & & \vdots \\ u_m & \cdots & \cdots & u_{m+s-1} & \lambda_{m+s} & * & \cdots & * \end{vmatrix} \tag{16}$$

Détailler les opérations effectuées ainsi que l'ordre dans lequel elles sont faites.
f) Conclure que la suite u est linéaire récurrente de polynôme minimal

$$\pi_u(X) = X^s + q_1 X^{s-1} + \cdots + q_{s-1} X + q_s \tag{17}$$

(*D'après épreuve 1, agrégation interne 2010*).