Université de Lorraine - UFR MIM **Année 2012/2013**
Préparation à l'agrégation interne de mathématique
Module *Algèbre linéaire*

Feuille 2

Algèbre linéaire

1- Normes matricielles
1) Pour $\|x\|$, norme sur $\mathbb{R}^n$ fixée, on définit la norme matricielle *subordonnée* sur $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{1}$$

On note $\|A\|_1$,$\|A\|_\infty$,$\|A\|_2$ les normes matricielles subordonnées aux normes

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \tag{2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{3}$$

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \tag{4}$$

Montrer que pour chacune de ces normes matricielles on a

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \tag{5}$$

(Noter que les trois normes qui interviennent dans (5) portent en général sur des espaces différents !).
3) Soit la norme matricielle

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}|. \tag{6}$$

Montrer que cette norme ne vérifie pas (5). On pourra considérer les matrices A et B données par

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

4) On définit la norme de Frobenius sur $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2)^{1/2} \tag{8}$$

Vérifier les relations suivantes

1.
$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \tag{9}$$

2.
$$\max_{i,j} |a_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\max_{i,j} |a_{i,j}| \tag{10}$$

3.
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \tag{11}$$

4.
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \tag{12}$$

5.
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty \tag{13}$$

6.
$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1 \tag{14}$$

2- Trace, norme de Frobenius, valeurs singulières

On considère l'espace $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels. Pour $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note
$$A \bullet B = \operatorname{tr}(AB^T). \tag{15}$$

1) Vérifier que
$$A \bullet B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{i,j}. \tag{16}$$

2) Montrer que $A \bullet B$ est un produit scalaire sur $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On note $\|A\|_F$ la norme associée.
3) Vérifier que l'on a
$$A = 0 \text{ si et seulement si } AA^T = 0 \tag{17}$$

4) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique de valeurs propres (réelles) $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$. Montrer que
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} \tag{18}$$

5) Rappeler le théorème de decomposition en valeurs singulières pour une matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
6) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Exprimer $\|A\|_F$ à l'aide des valeurs singulières de A.
7) Rappeler la définition de la norme euclidienne $\|A\|_2$ d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
8) Vérifier que
$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\|A\|_2 \tag{19}$$

Préciser les cas d'égalité dans les inégalités.

3- Représentation de la trace

On note ψ l'application définie sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$\psi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY) \tag{20}$$

1) Montrer que ψ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
2) Démontrer que si $(X_1, X_2, \cdots, X_{n^2})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une autre base $(X_1', X_2', \cdots, X_{n^2}')$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tel que pour $1 \le i, j \le n^2$ on ait
$$\psi(X_i, X_j') = \delta_{i,j}, \quad \text{symbole de Kronecker} \tag{21}$$

3) Démontrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on a
$$\sum_{1\le i\le n^2} X_i A X_i' = \operatorname{tr}(A) Id_{n\times n} \tag{22}$$

où $Id_{n\times n}$ désigne la matrice identité $n \times n$ de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

(*D'après épreuve 1, agrégation interne 2008*).

4- Rayon spectral

Les matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sont considérées comme des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Soit A une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A, c'est-a-dire le maximum des modules des valeurs propres de A. Si $x \in \mathbb{C}^n$, on note Ax l'image du vecteur x par l'endomorphisme défini par la matrice A.

- I -

On se propose de démontrer l'equivalence :

$$\rho(A) < 1 \Longleftrightarrow \lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \tag{23}$$

1) Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $|\beta| < 1$. Soit B une matrice nilpotente dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $l \geq 1$ tel que $B^l = 0$. On note C la matrice $C = \beta I_n + B$.
a) Pour tout entier $k \geq l$, exprimer C^k en fonction de $I_n, B, \cdots, B^{l-1}$.
b) En déduire que la suite $(C^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Soit α une valeur propre de A.
On pose $F_\alpha = \cup_{k\in\mathbb{N}}\text{Ker } (A - \alpha I_n)^k$.
i) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ et que $A(F_\alpha) \subset F_\alpha$.
ii) Soit A l'endomorphisme de F_α défini par $A_\alpha(x) = Ax$, pour $x \in F_\alpha$. Dans le cas où $|\alpha| < 1$, démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
b) On suppose $\rho(A) < 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
c) Réciproquement, si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, montrer que le module de toute valeur propre de A est strictement infèrieur à 1 .

- II -

1) Soit I_A l'ensemble formé par les nombres réels strictement positifs γ tels que la suite $((A/\gamma)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers 0. Démontrer que $I_A =]\rho(A); +\infty[$.
2) On suppose que A admet la valeur propre 1 et qu'il existe deux vecteurs $x, y \in \mathbb{C}^n$ non nuls tels que $Ax = x$ et $Ay = y + x$. Démontrer que la suite $(A^k y)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est contenue dans aucune partie compacte de $\mathbb{C}^n$.
3) On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ a pour limite une matrice B non nulle.
a) Démontrer que $\rho(A) = 1$.
b) Soit α une valeur propre de module 1 de A. Démontrer que la suite $(\alpha^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans C et en deduire que $\alpha = 1$.
c) Démontrer que le sous-espace vectoriel F_1 défini à la question I 2)a) est égal à Ker $(A - Id_n)$.
(*D'après épreuve 1, agrégation interne 2009*).