Université de Lorraine - UFR MIM **Année 2012/2013**
Préparation à l'agrégation interne de mathématique
Module *Algèbre linéaire*

Feuille 3

Algèbre linéaire

1- Une famille de matrices 2×2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On note

$$P_{x,y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1+y & 1-y \end{pmatrix} \tag{1}$$

1) Déterminer les valeurs propres de $P_{x,y}$ et, pour chaque valeur propre, son sous-espace propre associé. Pour quelles valeurs de (x, y) la matrice $P_{x,y}$ est-elle diagonalisable ?
2) On suppose désormais $-1 < x < 1$ et et $-1 < y < 1$.
a) Démontrer qu'il existe un nombre réel u tel que $-1 < u < 1$ et une matrice inversible U tels que

$$P_{x,y} = U^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}U \tag{2}$$

b) En déduire que la suite des itérés $(P^k_{x,y})_{k\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?
c) Démontrer que

$$L = \frac{1}{2+y+x}\begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+y & 1+x \end{pmatrix} \tag{3}$$

4) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4}$$

avec $a, b, c, d > 0$. Exprimer le discriminant Δ_A du polynôme caractéristique de la matrice A en fonction de a, b, c, d.
5) Démontrer l'inégalité $\Delta_A > 0$.
6) En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. En notant $\lambda_1 > \lambda_2$ ces deux valeurs propres, démontrer que $\lambda_1 > |\lambda_2|$.
7) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ admette une limite lorsque $k \to +\infty$. Dans le cas où la matrice limite existe et n'est pas nulle, que peut-on dire de son rang ? Proposer une méthode pour calculer cette limite.
8) Soit λ_1 et λ_2 deux nombres réels tels que $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Exhiber une matrice 2×2 A à coefficients strictement positifs dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2 (Indication : on pourra commencer par traiter le cas $\lambda_1 = 1$). (*D'après épreuve 1, agrégation interne 2009*).

2- Matrices réelles de partie symétrique positive

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel noté $(.|.)$ et de la norme correspondante $\|.\|$. On note $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels, et I la matrice identité. La norme usuelle sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est

$$\|A\| = \sum_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{5}$$

Une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est dite "s-positive" si $(Ax|x) \geq 0$pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
1) Montrer que toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'érit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique A_s et d'une matrice antisymétrique A_a.
2) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécesaire et suffisante sur les valeurs propres de A_s pour que A soit s-positive.
3) Montrer que, pour toute matrice s-positive $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, la matrice $\lambda I + A$ est inversible. On note dans ce cas $R(A) = (\lambda I + A)^{-1}$.
4) On considère les deux exemples suivants : a)

$$(i) \quad n = 2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$(ii) \quad n = 3, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Dans chaque cas, calculer $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $R_\lambda(A)$. Etude des limites éventuelles de $R_\lambda(A)$ et $\lambda R_\lambda(A)$ lorsque $\lambda \to 0$.

On suppose dans les questions 5,6,7,8 que A est une matrice s-postitive fixée et que $\lambda > 0$.
5) Démontrer les assertions suivantes:
a) $AR_\lambda(A) = R_\lambda(A)A = I - \lambda R_\lambda(A)$.
b) Pour tout réel $\mu > 0$, on a

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda))R_\lambda(A)R_\mu(A). \tag{8}$$

6) Démontrer que

$$\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{9}$$

avec égalité si et seulement si $\det A = 0$.
7) Démontrer les assertions suivantes:
a) Pour tout $x \in \operatorname{Im}(A)$, $\lambda R_\lambda(A)x \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$.
b) L'espace $\mathbb{R}^N$ est somme directe de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
c) Lorsque λ tend vers 0, $\lambda R_\lambda(A)$ tend vers le projecteur sur $\operatorname{Ker} A$ parallèlement à $\operatorname{Im} A$.
8) Montrer que l'application $\Phi : \lambda \mapsto R_\lambda(A)$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est indéfiniment dérivable. Exprimer ses dérivées successives $\Phi^{(p)}$ en fonction de ses puisssances $\Phi^{(q)}$.

On considère dans les questions 9,10,11 une application $F :]0, +1[\to \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$(i) \quad \forall \lambda > 0, \ \|F(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{10}$$

$$(ii) \quad \forall \lambda, \mu, F(\lambda) - F(\mu) = (\mu - \lambda)F(\lambda)F(\mu) \tag{11}$$

$$(iii) \quad F(1) \text{ est inversible.} \tag{12}$$

9) Montrer que $F(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda > 0$.
10) a) Calculer $F(\lambda)^{-1} - F(\mu)^{-1}$.
b) Montrer que, lorsque $\lambda \to 0$, $F(\lambda)^{-1}$ admet une limite A et que l'on a, pour tout $\lambda > 0$,

$$\lambda I + A = F(\lambda)^{-1}. \tag{13}$$

11) Montrer que les matrices $AF(\lambda)$ et A sont s-positives.
12) Pour $A \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$, montrer la convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{14}$$

On note $\exp(A)$ sa somme.
13) montrer que $t \to \exp(tA)$ est dérivable et que

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA). \tag{15}$$

14) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes:

$$(i) \quad \text{pour tout } t > 0, \|\exp(-tA)\| \leq 1 \tag{16}$$

$$(ii) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \text{la fonction } t \mapsto \|\exp(-tA)x\|^2 \text{ est décroissante.} \tag{17}$$

$$(iii) \quad A \text{ est s-positive.} \tag{18}$$

On fixe maintenant $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s-positive et un réel $\lambda > 0$.
15) Démontrer la convergence des intégrales

$$\rho(\lambda)_{i,j} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\exp(-tA))_{i,j}dt, \quad 1 \leq i,j \leq n \tag{19}$$

On note $\rho(\lambda)$ la matrice de coefficients $\rho(\lambda)_{i,j}$.
16) Comparer $\rho(\lambda)$ et $R_\lambda(A)$. (Indication: On pourra calculer d'abord $A\rho(\lambda) + \lambda\rho(\lambda)$).
17) On considère le premier exemple de la question 4. Calculer $\exp(-tA)$, puis $\rho(\lambda)$. Retrouver la valeur de $R_\lambda(A)$ obtenue à la question 4. (*Ecole Polytechnique, série Math-Physique, 2006*).