**Université de Lorraine - UFR MIM** **Année 2012/2013**
**Préparation à l'agrégation interne de mathématique**
**Module** *Algèbre linéaire*

# Feuille 4

# Algèbre linéaire

**1- Théorème de Courant-Fischer**
Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. le *quotient de Rayleigh* de $A$ appliqué au vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ est

$$R_A(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \tag{1}$$

Considérons le cas où la matrice $A$ est symétrique. Il n'y a en général aucune méthode simple pour déterminer les valeurs propres de $A$. Ceci est naturellement particulièrement vrai quand $n$ est grand. Donc tout renseignement sur les valeurs propres de $A$, même de nature qualitative est intéressant. Un résultat en ce sens est l'identification suivante des valeurs propres de la matrice $A$, par la formule du *minimax*.

On note les valeurs propres de $A$ sous la forme

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \cdots \lambda_1(A) \tag{2}$$

Alors la valeur propre $\lambda_k(A)$ s'écrit

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim(S)=k} \min_{x \in S, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \quad \text{(formule du minimax)} . \tag{3}$$

1) On suppose $k = 1$. Vérifier que (3) devient

$$\lambda_1(A) = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}. \tag{4}$$

Montrer (3) dans ce cas particulier.
2) On suppose $k = n$. Vérifier que (3) devient

$$\lambda_n(A) = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}. \tag{5}$$

Montrer (3) dans ce cas particulier.
3) Montrer le résultat (3) dans le cas général (cf notes de cours, chap. II).

**2- Spectre de graphes, théorème de Courant-Fischer pour les graphes**

Un graphe $G$ consiste en la donnée d'un ensemble de $n \geq 2$ *sommets* notés $\{1, 2, \cdots, n-1, n\}$, et d'un ensemble d'arêtes $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ consiste en un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}_2(n)$ des paires $\{i, j\}$ de points du graphe $G$.

On note $m$ le nombre d'arêtes et $\mathcal{A} = a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m$. Pour chaque point $i$ du graphe, $1 \leq i \leq n$, on note $d_i$ son degré, c'est-à-dire le nombre de voisins de $i$. On note également

$$D = \sum_{1 \leq i \leq n} d_i \tag{6}$$

On note de plus $\phi_1 \in \mathbb{R}^n$ le vecteur défini par, pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\phi_1(k) = \frac{\sqrt{d_k}}{\sqrt{D}}. \tag{7}$$

On note $L \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice symétrique définie par

$$L_{i,j} = \begin{cases} 1, \quad \text{si } i = j \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad \text{si } i \neq j \\ 0, \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{8}$$

On appelle également $\mathcal{L}$ l' endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont $L$ est la matrice dans la base canonique. On note enfin

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \tag{9}$$

les valeurs propres de $L$.
1) Démontrer, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a:

$$< \mathcal{L}x; x >= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \simeq i} \left( \frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \tag{10}$$

et

$$< \mathcal{L}x; x >= \sum_{a \in \mathcal{A}, a = \{i,j\}} \left( \frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} - \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}} \right)^2 \tag{11}$$

(NB: On note $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$).
2) Soit $a(x, y)$ une forme bilinéaire positive sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Rappeler la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$< \mathcal{L}x, y >^2 \leq < \mathcal{L}x, x > . < \mathcal{L}y, y > \tag{12}$$

3) En déduire que les valeurs propres de $\mathcal{L}$ sont positives ou nulles, que le noyau de $\mathcal{L}$ contient le vecteur $\phi_1$ et que $\lambda_1 = 0$.

On introduit les notions de *chemin*, *composante connexe* et *connexité* d'un graphe.

- Soient $i$ et $j$ deux sommets du graphe $G$ et $p \geq 2$ un entier. Un chemin de longueur $p$ reliant $i$ et $j$ est une suite de sommets $(s_1, s_2, \cdots, s_{p+1})$ telle que $s_1 = i$, $s_{p+1} = j$, et pour tout entier $1 \leq k \leq p$, $\{k, k+1\}$ est une arête, c'est-à-dire $\{s_k, s_{k+1}\} \in \mathcal{A}$.

- On admettra que pour tout graphe $G$, l'ensemble de ses $n$ sommets peut être partitionné en un certain nombre de sous-ensembles $\{J_1, J_2, \cdots, J_r\}$, appelés composantes connexes du graphe et vérifiant
  - pour tout $1 \leq k \leq r$, deux éléments de $J_k$ peuvent être reliés par un chemin
  - pour $k, l \in \{1, \cdot, r\}$, distincts de $\{1, \cdot, r\}$, aucun élément de $J_k$ ne peut être relié à un élément de $J_l$.
- $G$ est dit connexe lorsque $r = 1$, c'est-à-dire lorsque $G$ possède une seule composant connexe.

On souhaite démontrer l'équivalence suivante :

$$G \text{ est connexe } \iff \lambda_2 > 0 \tag{13}$$

4) Préciser la valeur de $r$ et des composantes connexes $\{J_1, J_2, \cdots, J_r\}$ pour le graphe à 7 sommets dont les arêtes sont

$$\mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{6,7\}\} \tag{14}$$

5) On revient au cas général. Démontrer que $\lambda_2$ est strictement positive si, et seulement si, $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ est la droite engendrée par $\phi_1$. (Indication: on pourra considérer l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda_1$).
6) Soit un vecteur $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}$. Démontrer que pour tous sommets $i, j$ reliés par un chemin on a

$$\frac{x(i)}{\sqrt{d_i}} = \frac{x(j)}{\sqrt{d_j}}. \tag{15}$$

7) Démontrer le sens direct de l'implication (13).
8) Démontrer que si $G$ n'est pas connexe on peut construire deux vecteurs de $\operatorname{Ker} \mathcal{L}$ non colinéaires. En déduire l'équivalence (13).
9) Soit $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ ($\phi_1$ étant le vecteur défini à la question 3)). et telle que

$$\mathcal{L}\phi_i = \lambda_i \phi_i, \quad 1 \leq i \leq n \tag{16}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, non nul,

$$\frac{< \mathcal{L}x, x >}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i < \phi_i, x >^2}{\sum_{i=1}^n < \phi_i, x >^2 .} \tag{17}$$

10) Démontrer les formules du minimax suivantes:

$$\lambda_n = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{< \mathcal{L}x; x >}{\|x\|^2} \tag{18}$$

et que

$$\lambda_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, < x, \phi_1 > = 0} \frac{< \mathcal{L}x; x >}{\|x\|^2}. \tag{19}$$

11) Soit $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée symétrique réelle positive d'ordre $n$. Pour tout $1 \leq p \leq n$, on considère la matrice $H_p \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ définie par

$$H_p = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}. \tag{20}$$

Montrer que $H_p$ est également symétrique positive. Vérifier de plus que si $\alpha$ et $\alpha_p$ sont les plus grandes valeurs propres de $H$ et $H_p$, on a $\alpha \geq \alpha_p$.
12) Soit $\phi \in \mathbb{R}^n$, non nul et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$H = \phi \phi^T \tag{21}$$

Vérifier que $H$ admet pour valeurs propres 0 et $\|\phi\|^2$ et préciser les ordres de multiplicité de ces deux valeurs propres.
13) Soit $G$ un graphe à $n$ sommets et les nombres $d_i$ associés. Le nombre $D$ est défini en (**??**). La plus grande valeur propre de $L$ est $\lambda_n$. Soit $M, N \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ définies par

$$M = (\sqrt{d_i d_j})_{1\leq i,j\leq n}, \quad N = L - I_n + \frac{\lambda_n}{D} M \tag{22}$$

Montrer que $M = D\phi_1\phi_1^T$, où $\phi_1$ est défini en (7). En déduire que tous les vecteurs propres de $L$ sont aussi des vecteurs propres de $M$.
14) Montrer que la plus grande valeur propre de $N$ est $\lambda_n - 1$.
(*D'après épreuve 1, agrégation interne 2011*).

**3- Matrices symétriques et formes quadratiques**
1) Rappeler le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.
2) Soit $A$ une matrice symétrique définie positive, qui s'écrit

$$A = P\Lambda P^T \tag{23}$$

avec $P$ matrice orthogonale et $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdot, \lambda_n)$. Exprimer $A^{-1}$ en fonction de $P$ et $\Lambda$.
3) Comment définir $A^{1/2}$ ?
4) Rappeler le lien entre matrices carrées symétriques $n \times n$ et formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.
5) Montrer que pour toute forme quadratique $q$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe une base orthonormée $e'_i$ dans laquelle $q$ s'exprime par

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \tag{24}$$

où $y_i$ désigne les coordonnées du vecteur $x$ dans la base $e'_i$.
6) Soit $A$ et $B$ deux matrices $n \times n$, $A$ symétrique et $B$ symétrique définie positive. Montrer que le maximum de $x^T Ax$ sous la contrainte $x^T Bx = 1$ est donné par la plus grande valeur propre de $B^{-1}A$. De plus, le vecteur qui réalise le maximum est un vecteur propre associé à cette plus grande valeur propre.

**4- Valeurs singulières et norme 2 matricielle**
1) Rappeler le théorème de décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
2) Démontrer que la norme matricielle $\|A\|_2$ coincide avec la plus grande valeur singulière de $A$. Autrement dit: pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il existe un vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|z\|_2 = 1$ avec

$$A^T Az = \mu^2 z \tag{25}$$

où $\mu = \|A\|_2$.
3) Montrer qu'une majoration de $\|A\|_2$ est

$$\|A\|_2 \leq (\|A\|_1 \|A\|_\infty)^{1/2} \tag{26}$$

**5- Valeurs singulières et valeurs propres**
Soit $X$ une matrice $n \times p$, (par exemple une matrice de donnéees correspondant à un échantillon de $n$ observations avec $p$ caractères.). Soit $r$ le rang de $X$. Montrer que pour tout $k \leq r$, la valeur propre numéro $k$ des matrices $X^T X$ et $XX^T$ sont les mêmes. On ordonne les valeurs propres sous la forme

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \tag{27}$$

Montrer que l'on passe des vecteurs propres $u_k \in \mathbb{R}^p$ de $XX^T$ à ceux $v_k$ de $X^T X$ correspondant à la valeur propre $\lambda_k$ par

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X u_k \tag{28}$$

et

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X^T v_k \tag{29}$$