Université de Lorraine - UFR MIM **Année 2012/2013**
Préparation à l'agrégation interne de mathématique
Module *Algèbre linéaire*

Feuille 6

Algèbre linéaire

1- Exponentielle matricelle

Pour $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et $p(X) = \sum_{l=0}^{k} c_l X^l \in \mathbb{C}[X]$, on considère la matrice

$$p(B) = \sum_{l=0}^{k} c_l B^l \tag{1}$$

En particulier pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et $t \in \mathbb{R}$, on note

$$p(At) = \sum_{l=0}^{k} c_l A^l t^l \tag{2}$$

1) Vérifier que

$$\frac{d}{dt} p(At) = A p'(At). \tag{3}$$

2) Soit $(C_k)_{k \geq 0}$ une suite de matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Rappeler la définition de

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k. \tag{4}$$

Quand dit-on que la série (4) est absolument convergente ?
3) On considère la série entière

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k, \tag{5}$$

de rayon de convergence $r > 0$. Montrer que la série

$$f(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k B^k \tag{6}$$

est absolument convergente pour $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\|B\| < r$, où $\|B\|$ est une norme matricielle quelconque sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire telle que $\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$.
4) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle. Montrer que l'on a pour $t \in]t_0, t_0[$, où $t_0 = r/\|A\|$,

$$\frac{d}{dt} f(At) = A f'(At) \tag{7}$$

5) Déduire de ce qui précède la définition de $\exp(B)$ (également noté e^B) pour toute matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer de plus que l'on a pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$,

$$(e^{At})' = Ae^{At} \tag{8}$$

6) On considère le système différentiel matriciel

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(0) = I_n, \end{cases} \tag{9}$$

où $t \mapsto y(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que e^{At} est l'unique solution de (9).
7) On considère pour résoudre (9) la méthode des approximations successives

$$\begin{cases} X_0 = I_n \\ X_{k+1}(t) = I_n + \int_0^t AX_k(s)ds, \quad k \geq 0, \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

Montrer que

$$X_k(t) = I + At + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k \tag{11}$$

En déduire une autre démonstration du fait que e^{At} est l'unique solution de (9).

2- Quelques propriétés de l'exponentielle matricielle

1) Montrer les trois propriétés suivantes de la fonction exponentielle

(a) Pour $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $BC = CB$, on a

$$e^{B+C} = e^B e^C. \tag{12}$$

(b) Pour $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\det C \neq 0$, on a

$$e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C. \tag{13}$$

(c) Pour tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$,

$$e^{\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)} = \mathrm{diag}(e_1^\lambda, \cdots, e_n^\lambda). \tag{14}$$

2) En déduire les identités suivantes:

1. $$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{15}$$

2. $$e^{A(s+t)} = e^{As} \cdot e^{At}. \tag{16}$$

3. $$e^{A+\lambda I_n} = e^\lambda \cdot e^A. \tag{17}$$

3) Dans cette question on vérifie que la condition de commutation $BC = CB$ n'est pas nécessaire pour avoir $e^{B+C} = e^B e^C$. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2i\pi \end{bmatrix} \tag{18}$$

Vérifier que A et B ne commutent pas et que $e^A = e^B = e^{A+B} = I_n$. En déduire que $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$.

3- Système différentiel linéaire

On rappelle le résultat suivant: soit $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $b(t) \in \mathbb{C}^n$ des fonctions continues sur un intervalle J. Alors le système différentiel

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(\tau) = \eta \end{cases} \tag{19}$$

possède une unique solution $y(t)$ pour tout $\eta \in \mathbb{C}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$.
On se restreint dans la suite au cas $b(t) = 0$.
1) Vérifier que l'application $\eta \in \mathbb{C}^n \mapsto X(t)$ définit un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dans l'ensemble des solutions de (19). Quelle est la dimension de l'espace des solutions ?
2) Que signifie que les fonctions $y_i(t)$, $i = 1, \cdots, k$ sont linéairement dépendantes ?
3) On considère le cas où $A(t) \equiv A$ est constant et où il existe $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ inversible tel que

$$B = M^{-1}AM \tag{20}$$

soit une matrice diagonale $B = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$. A quelle condition sur le vecteur $c_i \in \mathbb{C}^n$, la fonction $y_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i$ est-elle solution de (19) ?
4) Montrer que le système de solutions $y_1(t), \cdots, y_p(t)$ est lineairement indépendant si et seulement si les vecteurs $c_1, \cdots, c_p$ forment un système de vecteurs propres independants de la matrice A.
5) Montrer que si les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont deux-à-deux distinctes, de vecteurs propres associés $c_1, \cdots, c_n$, les solutions $y_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i$ forment un système fondamental de solutions.
6) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) = 4y_1(t) - 2y_2(t) - y_3(t) \end{cases} \tag{21}$$

a) Mettre (21) sous la forme (19).
b) Calculer un système fondamental de solutions de (21).

4- Exponentielle matricielle et forme de Jordan

Le théorème de Jordan s'exprime sous la forme suivante. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. On note s le nombre de vecteurs propres indépendants de A. Alors A est semblable à une matrice ayant s *blocs de Jordan*, c'est-à-dire, il existe $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ inversible tel que

$$J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & & J_s \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Chaque bloc de Jordan J_i est une matrice triangulaire avec une seule valeur propre λ_i et un seul vecteur propre:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{23}$$

Si le bloc de Jordan J_i est $m \times m$, la valeur propre λ_i est répétée m fois et il y a $m - 1$ fois le nombre 1 au-dessus de la diagonale. La même valeur propre λ_i peut apparaître dans plusieurs blocs lorsqu'elle correspond à plusieurs vecteurs propres indépendants.

1) Montrer que deux matrices ayant la même forme de Jordan sont semblables.
2) Trouver la forme de Jordan des matrices suivantes:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

3) Trouver la forme de Jordan des matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

4) Soit J la matrice

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{26}$$

Montrer que pour $n \geq 0$, J^n s'écrit

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \tag{27}$$

Montrer de plus que e^{Jt} s'écrit

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{28}$$

5) On considère le système différentiel

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{29}$$

où la matrice A est supposée mise sous forme de Jordan (22). Donner la forme de la solution de (29).

5- Exponentielle matricielle et stabilité

On s'intéresse à la stabilité des solutions du système différentiel linéaire suivant en dimension n:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(\tau) = X_0 \end{cases} \tag{30}$$

Intuitivement, un système différentiel est stable si lorsque la condition initiale est petite au temps initial, elle le demeure en temps grand. Puisque le système est linéaire, on se limite à classer les différents types de comportements en discutant le statut de la solution nulle. On distingue:

- La solution $X(t) \equiv 0$ est *stable* si toutes les solutions de (30) restent bornées sur $[\tau, +\infty[$.
- La solution $X(t) \equiv 0$ est *asymptotiquement stable* si toute solution $X(t)$ de (30) vérifie

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0 \tag{31}$$

- La solution $X(t) \equiv 0$ est instable si il existe une solution non bornée sur $[\tau, +\infty[$.

On admet pour l'instant le résultat suivant:

Theorem 0.1 *Soit* $X(t) = [X_1(t), \cdots, X_n(t)]^T$*, une solution de (30). Alors chaque composante* $X_i(t)$ *de* $X(t)$ *est une combinaison linéaire des fonctions*

$$t^k e^{ta} \cos(bt), \quad t^l e^{ta} \sin(bt) \tag{32}$$

où $\lambda = a + bi$ *parcourt l'ensemble des valeurs propres de* A *et* $k, l = 0, \cdots, n-1$*.*

Montrer les affirmations suivantes:
1) Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle < 0, alors

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = 0 \tag{33}$$

2) Si $\lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = 0$ pour toute solution $X(t)$, alors toute valeur propre de A a une partie réelle < 0.
3) Si toute valeur propre de A a une partie réelle > 0, alors

$$\lim_{t \to +\infty} \|X(t)\| = +\infty \tag{34}$$

4) Déduire le théorème de la dernière question de l'exercice précédent.