Epreuve du 20 octobre 2012

Algèbre linéaire

1- Exponentielle matricielle et équations différentielles linéaires

1) $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(x,y) = \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)^{1/2}$$

Est la norme associée à $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi\left[(x_1,y_1)(x_2,y_2)\right] = x_1x_2 + \frac{1}{2}y_1y_2$$

qui est clairement une forme bilinéaire symétrique définie positive.

2) On compare $\|L_t(x,y)\|^2$ et $\|(x,y)\|^2$

- $\|L_t(x,y)\|^2 = \left(-\frac{2}{3t}x + \frac{1}{4}y\right)^2 + \frac{1}{2}x^2 \quad (1)$
- $\|(x,y)\|^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

On veut estimer le double produit dans (1).
Pour ça on utilise :

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$$

$$\|L_t(x,y)\|^2 \leq \left[2\left(\frac{2}{3t}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]x^2 + 2\frac{1}{16}y^2$$

$$(2) \quad \|L_t(x,y)\|^2 \leq \underbrace{\left[2\left(\frac{2}{3t}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]}_{(2)}x^2 + \frac{1}{8}y^2$$

Le coefficient (2) devient plus petit que $\frac{1}{2}+\varepsilon$, ε fixé, pour t grand.

Donc si $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors k^2 s'écrit $k^2 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

D'après (2), $\|L_t(X,Y)\|^2 \leq k^2 X^2 + \frac{1}{8} Y^2$ pour $t \geq t_0(\varepsilon) = t_0(k)$

$$\leq k^2 \left[X^2 + \frac{1}{8k^2} Y^2\right]$$

et $\frac{1}{8k^2} \leq \frac{1}{2}$ car $k^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{8k^2} \leq \frac{1}{4}$.

Au total :

$$\|L_t(X,Y)\| \leq k \left[X^2 + \frac{1}{2} Y^2\right]^{1/2} = k\|(X,Y)\|$$

<u>Les points importants dans la suite</u>

- raisonner de <u>façon vectorielle</u> sur $Z(t) \subset \mathbb{R}^2$ (et non pas "composante par composante")
- bien dire dans quels espaces on effectue les passages à la limite

3) Il y avait une erreur d'énoncé :

$$\begin{cases} X_{n+1}(t) = 0 + \int_{t_0}^{t} \left(-\frac{2}{3s} X_n(s) + \frac{1}{4} Y_n(s)\right) ds \\ Y_{n+1}(t) = b + \int_{t_0}^{t} X_n(s)\, ds \end{cases}$$

ici, "s" et non pas "λ".

Ceci se réécrit :

(3) $$Z_{n+1}(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} A(s) Z_n(s)\, ds.$$

<u>N.B</u> : Il est mieux de réaliser dès ce stade qu'on veut rechercher

$$\begin{cases} Z'(t) = A(t) Z(t) \\ Z(t_0) = V_0 \end{cases}$$

(cF leçon 348_II, mots distribués)

Donc,

$$Z_1(t) - V_0 = \int_{t_0}^{t} A(s) \underbrace{Z_0(s)}_{V_0} ds$$

soit $$Z_1(t) - Z_0(t) = \int_{t_0}^{t} A(s) V_0 \, ds$$

En prenant la norme N :

(4) $$\| Z_1(t) - Z_0(t) \| \leq \int_{t_0}^{t} \| A(s) V_0 \| ds$$

[car $\| \int_a^b f(s) ds \| \leq \int_a^b \| f(s) \| ds$]

[dire que c'est clair - C'est vrai pour toute norme sur $\mathbb{R}^2$]

et dans (4), on majore l'intégrande par

$\| A(s) V_0 \| \leq k \| V_0 \|$ par la question 2) de l'énoncé car k et t_0 ont été choisis tel que (3) soit vrai. Donc cela donne

$$\| Z_1(t) - Z_0(t) \| \leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{k \|V_0\|}_{\text{indépendant de } s} ds \leq k \underbrace{|t - t_0|}_{\substack{\text{valeur absolue}\\ \text{inutile!}\\ =(t-t_0)}} \|V_0\|$$

Même méthode pour prouver (7) de l'énoncé :

$$Z_{n+1}(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} A(s) Z_n(s) \, ds$$

$$Z_n(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} A(s) Z_{n-1}(s) \, ds$$

Soustraction :

$$Z_{n+1}(t) - Z_n(t) = \int_{t_0}^{t} A(s) \left(Z_n(s) - Z_{n-1}(s) \right) ds$$

En prenant la norme :

$$\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} A(s)\,(z_n(s) - z_{n-1}(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \|A(s)\,(z_n(s) - z_{n-1}(s))\|\,ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} k\,\|z_n(s) - z_{n-1}(s)\|\,ds$$

d'où le résultat.

$$\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\| \leq k \int_{t_0}^{t} \|z_n(s) - z_{n-1}(s)\|\,ds$$

pour $t \geq t_0$.

4) On veut montrer (8) par récurrence.
Seul problème : sur quoi fait-on la récurrence ?

- $n = 1$: (8) se limite à $p = n-1 = 0$
donc (8) coïncide avec (6)

- On suppose que pour $n \geq p \geq 0$ on a

$$\|z_n(t) - z_p(t)\| \leq \|V_0\| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m (t-t_0)^m}{m!}$$

et on montre

$$\|z_{n+1}(t) - z_p(t)\| \leq \|V_0\| \sum_{m=p+1}^{n+1} \frac{k^m (t-t_0)^m}{m!}$$

On a : $\|z_{n+1}(t) - z_p(t)\| \leq \|z_{n+1}(t) - z_n(t)\| + \|z_n(t) - z_p(t)\|$

- Si $p = n$: $\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\| \leq k \int_{t_0}^{t} \|z_n(s) - z_{n-1}(s)\|\,ds$

$$\leq k \int_{t_0}^{t} \|V_0\| \frac{k^n (s-t_0)^n}{n!}\,ds = \frac{k^{n+1}\|V_0\|}{n!} \underbrace{\int_{t_0}^{t} (s-t_0)^n\,ds}_{\frac{1}{(n+1)}(t-t_0)^{n+1}}$$

d'où :

$$\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\| \leqslant \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1} \quad \text{c'est bien (8)}$$

. Si $p < n$:

$$\|z_{n+1}(t) - z_p(t)\| \leqslant \underbrace{\underbrace{\|z_{n+1}(t) - z_n(t)\|}_{\leqslant \|V_0\| \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}} + \underbrace{\|z_n(t) - z_p(t)\|}_{\text{estimé par récurrence par } \|V_0\| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m (t-t_0)^m}{m!}}}_{\leqslant \|V_0\| \sum_{m=p+1}^{n+1} \frac{k^m (t-t_0)^m}{m!}}$$

cqfd

5) On se place dans l'espace de Banach des fonctions continues sur $[t_0, t_1]$, t_1 fixé $> t_0$.
noté $C^0([t_0,t_1],\mathbb{R})$.

Rappel : c'est un espace complet, c'est-à-dire toute suite de Cauchy est convergente. [Le démontrer en exercice]

On applique ce résultat ici : Pour p_0 assez grand

$$\sum_{m=p_0+1}^{n} \frac{k^m (t-t_0)^m}{m!} \leqslant \sum_{m=p_0+1}^{n} \frac{k^m (t_1-t_0)^m}{m!}$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{m=p_0+1}^{+\infty} \frac{k^m (t_1-t_0)^m}{m!}}_{\text{reste de la série de } e^{k(t_1-t_0)}} \longrightarrow 0 \text{ quand } p_0 \to +\infty$$

Donc

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|z_n(t) - z_p(t)\| = |||z_n - z_p||| < \varepsilon$$

pour $n > p \geqslant p_0$

où on a noté $||| \ |||$ la norme

$$|||u||| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|u(t)\| \leftarrow \text{c'est la norme N !}$$

Alternative : on peut aussi <u>à t fixé</u> dire que $Z_n(t)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$ et converge donc vers $Z(t) \in \mathbb{R}^2$. Mais alors il faut montrer que $t \mapsto Z(t)$ est continue.

6) Conclusion de l'exercice : on a bien construit l'unique solution du système dynamique (9). En effet :

1) La solution de (9) est <u>unique</u> par un argument externe : ici le théorème de Cauchy-Lipschitz. On peut l'appliquer car $t_0 > 0$ et donc $A(t)$, $t \geq t_0$ est C^1. Donc

$$(x, y, t) \mapsto A(t)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad C^1 \text{ comme fonction de 3 variables}$$

$\Rightarrow$ les hypothèses du théorème sont satisfaites.

2) <u>Existence</u> : la fonction $Z(t)$ construite précédemment convient car $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ solution de (9) équivaut à :

$$Z(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\, Z(s)\, ds$$

2 - Topologie sur les matrices, exponentielle et logarithme matriciels

Point important : une application continue à valeurs dans $U_n(\mathbb{C})$ = polynômes veut dire à valeurs dans $U_n(\mathbb{C})$ = espace normé pour n'importe quelle norme (car $U_n(\mathbb{C}) \subset \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ = e.v. de dimension finie).

Sur $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, e.v. de dimension $n+1$ (sur $\mathbb{C}$), toutes les normes sont équivalentes - Donc par exemple $\| \ \|$ est équivalente à $|||\ |||$ définie par

$$|||p||| = \max_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ |z| \leq 1}} |p(z)|$$

1) $\Delta : \mathbb{C}^n \to U_n$

$$(\lambda_1 \dots \lambda_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

- Tout $p \in U_n$ est scindé ("théorème fondamental de l'algèbre"), donc il existe $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$ [= racines de p] tel que $p(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

Donc $\Delta(\lambda_1 \dots \lambda_n) = p$

- Si $\lambda_{i,k} \to \lambda_i$ quand $k \to +\infty$, $i = 1 \dots n$ alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$p_k = \Delta(\lambda_{1,k} \dots \lambda_{n,k}) \to p = \Delta(\lambda_1 \dots \lambda_n).$$

En effet : $p(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\lambda_1 \dots \lambda_n) X^i$

les $a_i(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ sont donnés par les "relations entre les coefficients et les racines".

[CF Lelong-Ferrand Arnaudiès T.1, p144.]

On a :

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Ici $a_n = 1 \Rightarrow$ cela donne la relation explicite entre $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et les a_i :

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

les a_i sont donc des fonctions continues des racines !!

Donc s est continue.

2) • Si $|z| \leq 1$, alors $|z| \leq 1 \leq 1 + \|P\|$

• Si $|z| > 1$, alors

$$z^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \Rightarrow$$

$$|z|^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i \leq \|P\| \sum_{i=0}^{n-1} |z|^i$$

Donc $|z| \leq \|P\| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{|z|^{n-1-i}} = \|P\| \frac{1 - \frac{1}{|z|^n}}{1 - \frac{1}{|z|}}$

$$\Rightarrow |z| \left(1 - \frac{1}{|z|}\right) \leq \|P\| \left(1 - \frac{1}{|z|^n}\right) \leq \|P\|$$

$$\Rightarrow |z| - 1 \leq \|P\| \Leftrightarrow |z| \leq 1 + \|P\|$$

3) On considère $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} U_n(\mathbb{C})$

$$A \mapsto (-1)^n \chi_A(\lambda)$$

les coefficients de $\chi_A(\lambda)$ sont des polynômes à n^2 indéterminés des coefficients a_{ij} de A, $1 \leq i,j \leq n$ - Donc ils sont continus $\Rightarrow$ la fonction φ est continue de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ à valeur $(U_n(\mathbb{C}), \| \|)$

4) a) L'image de $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ ne dépend pas de l'ordre sur $\{1 \dots n\}$, car

$$P(X) = \Delta(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

est également identique à

$$\Delta(\lambda_{\sigma(1)} \dots \lambda_{\sigma(n)}) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_{\sigma(i)})$$

Donc ceci s'applique à la suite $(\lambda_{1,k} \quad \lambda_{n,k})$: si $\Delta(\lambda_{1,k} \dots \lambda_{n,k}) \notin \Delta(\Omega)$, aucun des n-uplets $\lambda_{\sigma(1),k} \dots \lambda_{\sigma(n),k}$ n'appartient à Ω.

De plus $P_k \to P \Rightarrow \|P_k\|$ bornée, donc $|\lambda_{i,k}| \leq M$ en utilisant la question 1)

b) On a $(\lambda_{1,k} \dots \lambda_{n,k}) \in \mathbb{C}^n$ suite bornée

et qui est dans Ω^c = fermé de $\mathbb{C}^n$ - Donc

$(\lambda_{1,k} \dots \lambda_{n,k}) \in B(0,M) \cap \Omega^c$ = compact de $\mathbb{C}^n$

Donc il existe une valeur d'adhérence

$\mu = (\mu_1 \dots \mu_n) \in \Omega^c \cap B(0,M)$. Par continuité

de s, $P_k \xrightarrow{k\to+\infty} P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \mu_i)$

les μ_i sont les racines de P, donc $P \notin s(\Omega)$

5) On note $\Omega = \underbrace{\omega \times \omega \times \dots \omega}_{n \text{ fois}}$

On montre que l'ensemble des matrices dont au moins une valeur propre n'est pas dans ω est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$.

Soit A_k une suite de telles matrices t.q

$A_k \to A$ dans $M_n(\mathbb{C})$

Alors $\chi_{A_k}(\lambda) \to \chi_A(\lambda)$ dans $U_n(\mathbb{C})$

par 3) Par 4) b) $\chi_A(\lambda) \notin s(\Omega)$ c.a.d

A possède au moins une valeur propre qui n'est pas dans ω. cqfd

$$\omega = \{ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\operatorname{Im}(\lambda)| < \pi \}$$

qui est ouvert dans $\mathbb{C}$.

b) (i) Si $X \in \mathcal{N}$, alors $\exp(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^p}{p!}$

c.a.d. $\exp(X) = I + \underbrace{X \left(I + \frac{X}{2!} + \dots + \frac{X^{p-1}}{p!}\right)}_{N \in \mathcal{N} \text{ car :}}$

On a $\underbrace{X\left(I + \frac{X}{2!} + \dots + \frac{X^{p-1}}{p!}\right)}_{Y}$

Les matrices X et Y commutent et X nilpotent d'ordre $p \Rightarrow (XY)^p = X^p Y^p = 0$

(ii) f dérivable comme composée d'applications <u>différentiables</u>

Cette question n'est pas facile posée sous cette forme...

Si on écrit $\exp(tX) = I + Z(t)$ avec $Z(t) = \sum_{i=1}^{p(X)-1} \frac{t^i X^i}{i!}$, alors il faut montrer que

$$\frac{d}{dt} \ln (I + Z(t)) = X$$

Si on sait que (3) $\frac{d}{dN} \ln(I+N) = (I+N)^{-1}$, alors, on a :

(1) $$\frac{d}{dt} \ln(I + Z(t)) = Z'(t)(I+Z(t))^{-1}$$

Mais $Z(t) = \exp(tX) - I$

$$\Rightarrow Z'(t) = \exp(tX)X = (I+Z(t))X$$

(1) se récrit.

(2) $$(I+Z(t)) \frac{d}{dt} \ln(I+Z(t)) = Z'(t) = (I+Z(t))X$$

Donc $$\frac{d}{dt} \ln(I+Z(t)) = X$$

En appliquant $(I+Z(t))^{-1}$ de part et d'autre de (2)

Il suffit donc de montrer (3)

Mais $$\ln(I+N) = \sum_{q=1}^{p(N)-1} (-1)^{q+1} \frac{N^q}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dN} \ln(I+N) = \sum_{q=1}^{p(N)-1} (-1)^{q+1} N^{q-1}$$

et on a bien :

$$(I+N) \frac{d}{dN} \ln(I+N) = (I+N) \sum_{q=1}^{p(N)-1} (-1)^{q+1} N^{q-1}$$

$$= I - N^{p(N)} = I$$

Donc $$\frac{d}{dN} \ln(I+N) = (I+N)^{-1}$$

On a donc $f(t) = tX + \text{cte}$

Pour $t = 0$, on a $Z(t) = 0$ et $\ln(I + Z(t)) = \ln I$
$= 0$

$\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = tX$

(iii) On "fait" $t = 1 \Rightarrow \ln(\exp(X)) = X$

c) Si $D = P^{-1} \Lambda P$, $D' = P'^{-1} \Lambda' P'$

alors $\exp D = P^{-1} \exp \Lambda P$ et $\exp D' = P'^{-1} \exp(\Lambda') P'$

$\exp D = \exp D'$ donne

$\exp D = \sum r_i \exp(\lambda_i) l_i^T$ avec r_i, l_i^T = vecteurs propres à droite et à gauche en dualité

$(\exp D) r_{i0} = \exp(\lambda_{i0}) r_{i0}$
$= (\exp D') r_{i0} \Rightarrow \exp \lambda_{i0}$ valeur propre de $(\exp D')$ associé à $r_{i0} \Rightarrow$ on peut rappeler $P'^{-1} = P^{-1}$ et $P' = P$ et $\lambda'_{i0} = \lambda_{i0}$
Donc $D = D'$

d) Si $A = D + N$ et $A' = D' + N'$ sont tells que
$\exp(A) = \exp(A')$, alors
$\exp(D+N) = \exp(D' + N') \Leftrightarrow \exp(\underbrace{D - D'}_{\text{diagonale}} + \underbrace{N - N'}_{\text{nilpotente}}) = I$

Il faut donc montrer que si D est diagonale et N nilpotente sont t.q.
$\exp(D + N) = I$, alors $D = N = 0$

Mais $\exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$ car D et N commutent

Donc $\exp(N) = \exp(-D)$

$\Rightarrow$ $N = \ln \exp(-D)$ est diagonalisable (comme D)

donc nulle car si D est diagonalisable et nilpotente, elle est nulle donc

$N = 0$, $\exp(-D) = I \Rightarrow D = 0$ cqfd

Cela donne l'injectivité de la fonction exponentielle.