Problème Ecole Polytechnique 1980
Option P' – 2ème épreuve –

Correction

1– a) Soit $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$. On a $X \neq 0$

et $AX = Y$ avec $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum a_{ij} = 1$, $1 \leq i \leq n$

Donc $Y = X$. Donc $AX = X$, ce qui signifie que X est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_0 = 1$

b) La matrice $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ admet 1 comme unique valeur propre. En effet :

. Son polynôme caractéristique est
$$\chi_{I_n}(\lambda) = \det(I_n - \lambda I_n)$$
$$= (1-\lambda)^n \text{, donc } \chi_{I_n}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

. C'est un cas particulier de la propriété suivante : toute matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) a ses valeurs propres sur la diagonale.

Les matrices de $\mathcal{S}_n$ qui n'admettent qu'une valeur propre admettent 1 comme seule valeur propre. Elles satisfont donc

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n \times 1 = n$

Mais $tr(A) = \sum \alpha_{jj} \leq n$ donc $n = \sum \alpha_{jj} \Rightarrow \alpha_{jj} = 1 \; \forall j$

$\Rightarrow A = Id$

c) Réciproque : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est t.q. $X \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors $A \in \mathcal{S}_n$.

Preuve. On suppose donc que pour toute ligne i, $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i$$

c.a.d $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, ce qui signifie $A \in \mathcal{S}_n$.

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n$ et $X \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}(AB)X &= A(BX) = AX \quad \text{car } BX = X \quad (B \in \mathcal{S}_n) \\ &= X \quad \text{car } AX = X \quad (A \in \mathcal{S}_n)\end{aligned}$$

donc X est vecteur propre associé à AB de valeur propre $\lambda = 1$, donc $AB \in \mathcal{S}_n$

2- On a $\|A^r X\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |A^r x|_i$

Montrons que $|(A^r x)_i| \leq \|x\|$ par récurrence sur r

- $r = 0$ $A^r = I$, donc $|(A^r x)_i| = |x_i| \leq \|x\|$

- Supposons que $|(A^r x)_i| \leq \|x\|$, alors

$$(A^{r+1} x)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} (A^r x)_j, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}|(A^{r+1} x)_i| &\leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} |(A^r x)_j| \\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\Big) \|x\| = \|x\| \quad \text{cqfd}\end{aligned}$$

Donc $\|A^r x\| \leq \|x\|$.

Donc si $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de A^n,

$$A^n X = \lambda X \quad , \quad X \in \mathbb{C}^n, \quad X \neq 0$$

$$\|A^n x\| = |\lambda| \, \|X\| \leq \|X\| \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \text{ , car } X \neq 0 \Leftrightarrow \|X\| > 0$$

(on divise par $\|X\| > 0$)

3 – Soit A orthogonale, c.a.d $A^T A = A A^T = I$

On a $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Le coefficient (i,k) de $A A^T$ est :

$$(A A^T)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \alpha_{kj} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

En particulier $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = 1$ – Mais $0 \leq \alpha_{ij}^2 \leq \alpha_{ij} \leq 1$

Donc $1 \leq \sum \alpha_{ij}^2 \leq \sum \alpha_{ij} = 1 \Rightarrow$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^2 \qquad j = 1 \dots n \quad \text{et } i = 1 \dots n$$

Donc $\alpha_{ij} = 0$ ou $\alpha_{ij} = 1$. Les coefficients de A sont 0 ou 1 sur chaque ligne.

Puisque $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1 \quad i = 1 \dots n$, il y a exactement un seul coefficient $\alpha_{i j(i)} = 1$ sur chaque ligne et $i \in [1..n] \mapsto j(i) \in [1..n]$ est nécessairement une bijection car A est inversible (si $j(i_1) = j(i_2)$ les lignes i_1 et i_2 sont identiques et A n'est pas inversible, donc non orthogonale !)

Donc A est une matrice de permutation

4 – Soit $A \in \mathcal{S}_n$ t.q. $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

$A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (\beta_{ij})_{1\leq i,j \leq n}$

$AA^{-1} = I$ équivaut à $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{jk} = \delta_{ik}$

En particulier $\sum_j \alpha_{ij}\beta_{ji} = 1$ $\quad i = 1 \dots n$

On montre que ceci entraîne que pour chaque ligne i_0 de A, il existe $j(i_0)$ t.q. $\alpha_{i_0 j(i_0)} = 1$.
Par définition de $\mathcal{S}_n$, ceci entraînera que A est une matrice de permutation.

Par l'absurde : soit $i_0 \in [1 \dots n]$.
Supposons que $0 < \max_{1\leq j\leq n} \beta_{ji_0} < 1$

(On a "$\max \beta_{ji_0} > 0$" sinon A^{-1} est singulière).
Ceci entraîne :

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_0 j}\beta_{j i_0} < \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_0 j} = 1 \quad \text{contradiction}$$

Donc pour tout $i_0 \in [1 \dots n]$, on a

$$\max_{1\leq j\leq n} \beta_{j i_0} = 1$$

donc il existe au moins un indice $j(i_0)$ t.q. $\beta_{j(i_0) i_0} = 1$ – Mais $i_0 \in [1 \dots n] \mapsto j(i_0) \in [1 \dots n]$ est nécessairement bijective (sinon $A^{-1} = (\beta_{ij}) \in \mathcal{S}_n$ serait non inversible)

On a $1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_0 j}\beta_{j i_0}$ et le seul j t.q. $\beta_{j i_0} \neq 0$ est $j(i_0)$ (à cause de la bijectivité de $i_0 \mapsto j(i_0)$)

donc $1 = \alpha_{i_0 j(i_0)} \underbrace{\beta_{j(i_0) i_0}}_{=1} \Rightarrow \alpha_{i_0 j(i_0)} = 1$

et A est donc une matrice de permutation.

Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de A, on a

$|\lambda| \leq 1$ et $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de A^{-1}

donc $|1/\lambda| = 1/|\lambda| \leq 1$ par 2). Donc

$$|\lambda| \leq 1, \quad |\lambda| \geq 1 \iff |\lambda| = 1$$

5 - a Soit λ une valeur propre de $A \in \mathcal{S}_n$ t.q. $|\lambda| = 1$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de norme 1. Ceci signifie que

$$Ax = \lambda x \quad \text{avec} \quad \|x\| = \sup |x_i| = 1$$

Soit i_0 t.q. $\sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_{i_0}| = 1$. On a pour cet indice i_0 :

$$(Ax)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_0 j} x_j = \lambda x_{i_0}$$

donc $|(Ax)_{i_0}| = |\lambda x_{i_0}| = |\lambda| \, |x_{i_0}| = 1 \times 1 = 1$

donc la coordonnée d'indice i_0 de Ax est également de module 1. Alors λ s'exprime comme

$$\lambda = \frac{(Ax)_{i_0}}{x_{i_0}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_0 j} \frac{x_j}{x_{i_0}}$$

Mais $z_j = \frac{x_j}{x_{i_0}} \in \mathbb{C}$ est tel que $\left| \frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq 1$ par définition de i_0. Donc λ apparait comme une COMBINAISON CONVEXE de $z_j \in \overline{D}(0,1)$ (disque fermé unité)

Ceci, car $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$. Donc par convexité de $\overline{D}(0,1)$, on a $|\lambda| \leq 1$. De plus puisque $|\lambda| = 1$, λ est sur le cercle unité, qui est la frontière de $\overline{D}(0,1)$. Ceci entraîne que il existe j_0 t.q. $\alpha_{i_0 j_0} = 1$ et les autres $\alpha_{i_0 k} = 0$, $k \neq j_0$ et donc

$$\lambda = \frac{x_{j_0}}{x_{i_0}}$$

N.B. : ici il faut savoir plus ou moins que $D(0,1)$ est strictement convexe et que

$$z = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2, \quad z_1 \neq z_2, \quad \alpha \in]0,1[$$
$$\Longrightarrow |z| < 1.$$

Donc x_{j_0} est t.q. $|x_{j_0}| = 1$ également.

Soit $j_0 = i_0$ et alors $\lambda = 1$

Soit $j_0 \neq i_0$ et on recommence : il existe k_0 t.q.

$$\lambda = \frac{x_{k_0}}{x_{j_0}}$$ (on remplace l'indice i_0 par l'indice j_0)

En retombe nécessairement sur i_0 en itérant donc il existe s t.q.

$$\lambda^s = \underbrace{\frac{x_{j_0}}{x_{i_0}}}_{\lambda} \underbrace{\frac{x_{k_0}}{x_{j_0}}}_{\lambda} \cdots \underbrace{\frac{x_{i_0}}{x_{l_0}}}_{\lambda} = 1$$

cqfd

b– Si toutes les valeurs propres de A sont de module 1, on les note $\lambda_1 .. \lambda_t$. Il leur correspond $s_1, s_2 .. s_t$ t.q.

$$\lambda_1^{s_1} = \lambda_2^{s_2} .. \lambda_t^{s_t} = 1 \quad , \text{donc}$$

$$P(X) = X^{s_1 s_2 .. s_t} - 1 \quad \text{annule tous les } \lambda_k.$$

Donc le polynôme minimal $\mu_A(X)$ divise $P(X)$

Donc il existe t t.q.

$$A^t - I = 0$$

Donc $A^{-1} = A^{t-1} \in \mathcal{P}_n$, donc A est une matrice de permutation, donc également orthogonale, d'après 4).