ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1980

OPTION P'

# DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni de sa base canonique sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et de la norme définie pour tout $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ par $\| x \| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | \xi_i |$.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées complexes d'ordre $n$. Pour les éléments $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ d'une telle matrice $A$, le premier indice $i$ est celui de la ligne, le second $j$ est celui de la colonne où se trouve $\alpha_{i,j}$ ; $Ax$ désigne l'image de $x \in \mathbb{C}^n$ par l'endomorphisme $\mathcal{A}$ associé à $A$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note $\mathcal{S}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices à éléments $\alpha_{i,j}$ tous réels positifs ou nuls et telles que, de plus, pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 1$. $I \in \mathcal{S}_n$ désigne la matrice de l'endomorphisme identique, et on convient que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n$, $A^0 = I$.

## I

**1 - a)** Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n$ admet au moins une valeur propre, qu'on précisera et pour laquelle on indiquera un vecteur propre.

**b)** Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{S}_n$ qui n'admet qu'une valeur propre. Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{S}_n$ qui n'admettent qu'une seule valeur propre ?

**c)** Enoncer et démontrer une réciproque à la question I.1, a . En déduire que si $A$ et $B$ appartiennent à $\mathcal{S}_n$, il en est de même de $AB$.

**2 -** Soient $A \in \mathcal{S}_n$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que lorsque $r \in \mathbb{N}$, la norme $\| A^r x \|$ reste bornée. En déduire que les valeurs propres de $A$ sont toutes de module inférieur ou égal à 1 .

**3 -** Quelles sont les matrices orthogonales qui appartiennent à $\mathcal{S}_n$ ? Montrer qu'elles constituent, pour la multiplication des matrices, un groupe isomorphe au groupe symétrique d'un ensemble à $n$ éléments.

.../...

4 - Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{S}_n$ dont l'inverse appartient aussi à $\mathcal{S}_n$ ? Comparer ces matrices à celles trouvées dans la question I.3 ; quel est le module de leurs valeurs propres ?

5 - a) Soient $\lambda$ une valeur propre de $A \in \mathcal{S}_n$ telle que $|\lambda| = 1$, et $x$ un vecteur propre de norme 1 associé à $\lambda$. Montrer que toute coordonnée de module 1 de $Ax$ est une coordonnée de module 1 de $x$. En déduire qu'il existe un entier $s \geqslant 1$ tel que $\lambda^s = 1$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ une matrice dont toutes les valeurs propres sont de module 1. Montrer qu'il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que $A^t = I$. Comparer $A$ aux matrices trouvées dans la question I.4.

## II

Dans cette partie, on envisage des suites $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de matrices $A_r \in \mathcal{M}_n$. En notant $\alpha_{i,j}(r)$ l'élément de la $i$-ème ligne et de la $j$-ème colonne de $A_r$, on dit que la suite $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_n$ si, pour chaque couple d'entiers $i$ et $j$ compris entre 1 et $n$, la suite $(\alpha_{i,j}(r))_{r\in\mathbb{N}}$ converge vers l'élément $\beta_{i,j}$ de $B$.

1 - Montrer que la convergence de la suite $(A_r)_{r\in\mathbb{N}}$ équivaut à la convergence pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ de la suite $(A_r x)_{r\in\mathbb{N}}$.

2 - On suppose que $A_r = A^r$ est la puissance $r$-ème d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ donnée.

a) Si $A$ admet une valeur propre de module 1 et différente de 1, la suite $(A^r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

b) Si la suite $(A^r)_{r\in\mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_n$, montrer que $B^2 = B$. Quelles peuvent être les valeurs propres de $B$ ?

c) Dans les hypothèses de II.2, b, on suppose en outre que $A \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $B$ appartient à $\mathcal{S}_n$ et donner, avec $n = 2$, pour chacun des ensembles possibles de valeurs propres de $B$ dans ces conditions, un exemple de matrice $A \in \mathcal{S}_n$.

3 - On considère une matrice $A \in \mathcal{S}_n$ et les sous-espaces vectoriels $E_1$ et $E_2$ de $\mathbb{C}^n$ respectivement égaux au noyau et à l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ associé à $A - I$ dans la base canonique.

.../...

a) Soit $v \in \mathbb{C}^n$ ; on suppose que $u = Av - v$ appartient à $E_1$. Calculer, pour $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, $A^r v$ en fonction de $v$. En déduire que $E_1$ et $E_2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

b) Vérifier que l'image de $E_2$ par l'endomorphisme $\mathcal{A}$ associé à A est inclus dans $E_2$. Montrer que les vecteurs propres de A appartiennent soit à $E_1$, soit à $E_2$ ; comment se répartissent-ils entre ces deux sous-espaces en fonction de leur valeur propre associée ?

c) On suppose que le polynôme caractéristique de $A$ n'a, hormis la racine simple ou multiple égale à 1, que des racines simples et de module strictement inférieur à 1. Montrer que la suite $(A^r)_{r \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $B \in \mathcal{S}_n$ qu'on précisera géométriquement.

4 - On écrit une matrice $A \in \mathcal{S}_3$ sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho\,\sigma & \rho\,\tau \\ \rho'\,\sigma' & 1-\rho' & \rho'\,\tau' \\ \rho''\,\sigma'' & \rho''\,\tau'' & 1-\rho'' \end{pmatrix}$$

avec $\rho, \sigma, \tau, \rho', \sigma', \tau', \rho'', \sigma'', \tau''$ éléments de $[0,1]$ et $\sigma + \tau = \sigma' + \tau' = \sigma'' + \tau'' = 1$.

a) Ecrire les conditions qui traduisent l'hypothèse supplémentaire suivante : 1 est racine d'ordre 2 du polynôme caractéristique de $A$. Montrer que ces conditions signifient que A ne peut avoir, à l'ordre près des lignes, que deux formes, qu'on précisera.

b) En supposant différente de $-1$ l'autre valeur propre de A, donner, pour chacune des deux formes trouvées ci-dessus, l'expression explicite de la limite de la suite $(A^r)_{r \in \mathbb{N}}$.

5 - Soit $\lambda \in [0,1[$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3 .$$

a) Calculer $(A - \lambda I)^r$, puis $A^r$, pour tout $r \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite $(A^r)_{r \in \mathbb{N}}$.

c) De quelle façon cet exemple complète-t-il le résultat de la question II.3, c ?