**Université de Lorraine - UFR MIM** **Année 2013/2014**
**Préparation à l'agrégation interne de mathématique**
**Module** *Algèbre linéaire*

# Feuille 1

## ALGÈBRE LINÉAIRE

**1- Calcul dans** $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$
1) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée $(e_1, e_2, e_3)$.
1) Pour $i = 1,2,3$, déterminer $f \circ f(e_i)$ et $f^3(e_i)$.
2) En déduire $A^2$ et $A^3$.
3) Déterminer l'expression de $A^k$ en fonction de $k$.
4) Pour $k \in \mathbb{N}$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de $k$. Même question pour la matrice $(3I_3 + 2A)^k$.

**2- Transposition**
1) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Rappeler la définition de la matrice transposée $A^T$. De même rappeler la définition de $A^*$ pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Rappeler ce que signifie qu'une matrice $A$ est *symétrique*, et qu'une matrice $A$ est *hermitienne*.
2) Vérifier que $(AB)^T = B^T A^T$. On précisera la nature de $A$ et $B$.
3) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Quelles est la dimension des matrices $x^T y$ et $xy^T$ ?. Donner leur coefficients.
4) Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on considère la matrice $\sigma(x) = I - 2(x^T x)^{-1} x x^T$. Calculer $\sigma(x)x$ et $\sigma(x)y$ pour $y \in \mathbb{R}^n$ orthogonal a $x$.
5) Soit $x_1, x_2 \cdots, x_m \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i x_i^T \quad (2)$$

est symétrique. Formuler la réciproque de l'affirmation précédente. Cette réciproque est-elle vraie ?
6) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A$ est antisymétrique si $A^T = -A$. Montrer chacune des deux affirmations suivantes:

1. $x^T Ax = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $A$ est anstisymétrique
2. $A$ est symétrique et $x^T Ax = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $A = 0$.

**3- Trace d'une matrice**
La trace d'une matrice carrée $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{3}$$

1) Montrer que pour $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \tag{4}$$

2) Montrer que pour toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 \tag{5}$$

En déduire que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = 0$ si et seulement si $A^T A = 0$.
3) Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, tel que $A^T A = A^2$. Montrer que

$$\operatorname{tr}\left((A - A^T)^T (A - A^T)\right) = 0 \tag{6}$$

et en déduire que $A$ est symétrique.