J-P. CROISILLE
17 DÉC 2012

Déterminants _ Applications

1_ Déterminants et applications multilinéaires alternées

1.1. Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension n. (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On étudie l'espace des formes n_linéaires alternées, noté $\Lambda^{*n}(E)$.

$$\varphi : \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme n_linéaire alternée si

1) $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ est linéaire par rapport à chaque variable x_j, $1 \leq j \leq n$, c'est_à_dire

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots \alpha x_j + \beta y_j, x_{j+1} \ldots x_n) =$$

$$\alpha \varphi(x_1, x_2, \ldots x_j, x_{j+1}, \ldots x_n) + \beta \varphi(x_1, x_2, \ldots y_j, \ldots x_n)$$

2) $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n) = 0$ si 2 vecteurs parmi $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont identiques.

La structure des formes n_linéaires alternées est simple. Elle est donnée par la

__Proposition 1:__ Les formes n_linéaires alternées forment un sous-espace vectoriel de toutes les formes n_linéaires, qui est de dimension 1.

<u>dém:</u> Soit $\varphi \in \Lambda^{*n}(E)$, une forme n-linéaire alternée. On regarde la forme que doit avoir $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$, où $x_i \in E$, (condition nécessaire)

Soit $(e_1 \dots e_n)$ une base de E et soit

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, e_j$$

la décomposition de chaque $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$.

On a:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{j1} e_j, \sum_{j=1}^{n} a_{j2} e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{jn} e_j\Big)$$

$$= \sum_{\chi \in \mathcal{F}_{n,n}} \Big(\prod_{i=1}^{n} a_{\chi(i) i}\Big)\, \varphi\big(e_{\chi(1)} \dots e_{\chi(n)}\big) \qquad (1)$$

où $\mathcal{F}_{n,n}$ désigne l'ensemble des applications de $\{1, 2, \dots n\}$ dans $\{1, 2, \dots n\}$. Mais toute application $\chi \in \mathcal{F}_{n,n}$ t.q. χ soit non bijective (c.a.d. telle qu'il existe $i \neq j$ avec $\chi(i) = \chi(j)$) est telle que

$$\varphi\big(e_{\chi(1)}, \dots e_{\chi(n)}\big) = 0 \qquad \underline{\text{car } \varphi \text{ est alternée}}.$$

Donc dans (1), la somme se restreint aux bijections $\sigma \in \mathcal{S}_n$ = ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments.

Noter de plus que pour tout $i \neq j$,

$$\varphi(x_1, \dots x_j, \dots x_i, \dots x_n) = -\varphi(x_1, x_2 \dots x_i \dots x_j, \dots x_n)$$

car

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_i + x_j, \ldots\ x_i + x_j, \ldots x_n) = 0$$

Donc

$$\underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots\ x_i, \ldots x_n)}} + \varphi(x_1, x_2, \ldots x_j, \ldots x_i, \ldots x_n) + \varphi(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_j, \ldots x_n) + \underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(x_1, \ldots x_j, \ldots x_j, \ldots x_n)}}$$

Donc pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$\varphi(x_{\sigma(1)} \ldots\ x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

On déduit donc de la formule (1) que

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots\ x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}\ \varepsilon(\sigma)\ \varphi(e_1 \ldots\ e_n)$$

Donc $$\boxed{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \underbrace{\varphi(e_1, \ldots e_n)}_{\text{facteur de proportionalité}} \underbrace{\left[\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n}\right]}_{\Delta(x_1, x_2, \ldots x_n)}} \quad (2)$$

φ est donc nécessairement proportionnelle à l'application $\Delta : E^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1)1} \ldots\ a_{\sigma(n)n}$$

Réciproquement, il faut vérifier que l'application Δ ainsi définie est bien n-linéaire alternée. Elle est n-linéaire. De plus, pour $X = (x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n)$ avec $x_i = x_j$, on vérifie que $\Delta(X) = 0$.

On a $\Delta(X) = \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\, x_{\sigma(1)1} \dots {}_{\sigma(n)n}}_{(I)} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \Sigma_n \setminus \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \dots {}_{\sigma(n)n}}_{(II)}$

où $\mathcal{A}_n$ = permutations paires. Les parties $\mathcal{A}_n$ et $\Sigma_n \setminus \mathcal{A}_n$ sont en correspondance par $\sigma \mapsto \tau\sigma$, pour τ = permutation entre i et j.

La somme (II) est $\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma\tau)\, a_{\sigma\tau(1)1} \dots a_{\sigma\tau(n)n}$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \varepsilon(\sigma\tau)\, a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(j)i} \dots a_{\sigma(i)j} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Mais $x_i = x_j \Rightarrow a_{ki} = a_{kj}$, donc $a_{\sigma(j)i} = a_{\sigma(j)j}$ et $a_{\sigma(i)j} = a_{\sigma(i)i}$. Ceci donne $\Delta(X) = 0$, donc Δ est bien alternée. De plus Δ est bien n-linéaire et également $\Delta \not\equiv 0$, car $\Delta(e_1, e_2, \dots e_n) = 1$.

<u>Conclusion</u>: $\dim \Lambda^{*n}(\mathbb{R}) = 1$, dirigé par Δ.

1.2. Déterminant d'un endomorphisme

Soit φ, une forme n-linéaire alternée non nulle sur E de dim n ($\varphi \in \Lambda^{*n}(E)$) et u un endomorphisme de E ($u \in \mathcal{L}(E)$), alors

$$\varphi_u(x_1, x_2, \dots x_n) = \varphi(u(x_1), \dots u(x_n)) \in \Lambda^{*n}(E)$$

Donc φ_u est proportionnelle à φ – Le facteur de proportionalité est <u>le déterminant de u.</u>

$$\varphi_u(x_1, x_2, \dots x_n) = \det(u)\, \varphi(x_1, \dots x_n)$$

Cette définition est légitime car on vérifie que $\det(u)$ ne dépend pas du choix de φ. En effet, si $\psi \in \Lambda^{*n}(E)$ est une autre forme n-linéaire alternée, $\psi \neq 0$, alors $\psi = \lambda \varphi$, $\lambda \neq 0$, puisque $\dim \Lambda^{*n}(E) = 1$. Donc

$$\begin{aligned} \psi_u(x_1, x_2, \dots x_n) &= \lambda\, \varphi_u(x_1 \dots x_n) \\ &= \lambda \det(u)\, \varphi(x_1, x_2, \dots x_n) \\ &= \det(u)\, \psi(x_1, \dots x_n) \end{aligned}$$

Donc le nombre "$\det(u)$" <u>est bien intrinsèque</u> : il ne dépend que de u et pas du choix de φ.

2 - Déterminant d'une matrice

On vient de voir que si A est la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alors le nombre

$$\Delta(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \qquad (3)$$

intervient de façon "naturelle" dans l'analyse qui précède. Quel est le sens physique de (3) ? $\Delta(A)$ est en fait <u>le volume du parallélépipède</u> basé sur les vecteurs $x_1, x_2, \dots x_n$ de composantes $a_{i1} \dots a_{in}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, l'écriture (2) s'interprète comme le <u>volume avec unités</u> :

$$\underbrace{\mathrm{Vol}(x_1, \dots x_n)}_{\substack{\text{volume du} \\ \text{parallélépipède} \\ \text{en } cm^3,\, dm^3,\, m^3 \text{ etc...}}} = \underbrace{\mathrm{Vol}(e_1, \dots e_n)}_{\substack{\text{volume du} \\ \text{parallélépipède} \\ \text{élémentaire} \\ \text{basé sur la} \\ \text{base } e_1 \dots e_n}} \; \underbrace{\Delta(x_1, x_2, \dots x_n)}_{\substack{\text{nombre sans dimension} \\ = \text{le "déterminant"} \\ \text{du système de} \\ \text{vecteurs } x_1, x_2, \dots x_n}} \qquad (4)$$

⚠ Le nombre $\Delta(x_1, x_2, \dots x_n)$ donne <u>à lui seul</u> une description essentielle des propriétés du système de vecteurs $x_1, x_2 \dots x_n$.

On note $\det(A) = \Delta(A)$

NB: On peut partir de la formule (3) et ne pas parler de $\Lambda^{*n}(E)$, pour définir le déterminant.

Propriété 1: [liste de propriétés de "det"]

a) $\det(I_n) = 1$

b) $\det(AB) = \det(BA)$

c) $\det(A^T) = \det A$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

d) Matrice bloc

$$\det\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det B \det D$$

e) $\det A \neq 0 \iff A$ inversible

f) développement selon une ligne ou une colonne

g) invariance du déterminant par ajout de C.L. des lignes ou des colonnes

On peut prouver tout cela soit à partir de la définition utilisant $\Lambda^{*n}(E)$, ou alors directement à partir de la formule (3)

Propriété 2 [développement de $\Delta(A)$]

On a les deux formules :

1) Développement par colonne j fixée

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}$$

2) Développement par ligne i fixée

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \Delta_{ik}$$

Δ_{ik} = cofacteur n° (i,k)

= déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne k.

3 Exemples de calcul de déterminants

3.1. Déterminant de Van der Monde

On note pour $x_1, \dots x_p \in \mathbb{R}$,

$$V(x_1, \dots x_p) = \det\left(\left(x_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq p}\right)$$

On montre $V(x_1, \dots x_p) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq p} (x_j - x_i)$

Application:

① Soit $p > n$, $Q_i(X) = \sum\limits_{j=1}^{n+1} \beta_{ij} X^{j-1}$

et $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1\leq i\leq p$

- Si $p > n+1$, alors $\det\left(Q_i(\alpha_j)\right)_{1\leq i,j\leq p} = 0$
- Si $p = n+1$, alors $\det\left(Q_i(\alpha_j)\right)_{1\leq i,j\leq p} = \det \beta_{ij}\, V(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p)$

exemple:
- $\det\left(\cos (j-1)\theta_i\right) = 2^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} V(\cos\theta_1, \dots \cos\theta_p)$
- $\det\left(\sin j\theta_i\right) = 2^{\frac{p(p-1)}{2}} V(\cos\theta_1, \cos\theta_2 \dots \cos\theta_p)$

② Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ et $\beta \in \mathbb{R}$ –
Si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est la solution de

$$\sum_{i=1}^{p} x_i\, \alpha_i^{j-1} = \beta^{j-1}, \quad 1\leq j\leq p, \text{ alors}$$

$$x_i = \frac{V(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1} \dots \alpha_p)}{V(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p)}$$

Soit α_i, β_i, $i = 1 \dots n$, tels que $\alpha_i + \beta_j \neq 0 \ \forall i, j$

Alors $\det \left(\dfrac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right) = \dfrac{\prod_{i<j} (\beta_j - \beta_i)(\alpha_j - \alpha_i)}{\prod_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)}$

3.3 Déterminant de Hankel

On note $U(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, série formelle

Le déterminant de Hankel associé est

$$H_n^k = \begin{vmatrix} \alpha_n & \alpha_{n+1} & \cdots & \alpha_{n+k-1} \\ \alpha_{n+1} & \alpha_{n+2} & \cdots & \alpha_{n+k} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n+k-1} & \alpha_{n+k} & \cdots & \alpha_{n+2k-1} \end{vmatrix}$$

On a $U \in \mathbb{R}[X]$ (U est un polynôme) si et seulement si

$\exists \alpha \geq 0$, $\exists q \geq 0$ tel que $\forall j \geq 0$, $H_{\alpha+j}^{q+1} = 0$

4- Applications

4.1 Calcul de A^{-1}

S'effectue en partant du développement de det A avec les cofacteurs. CF leçon de M. Benoît

4.2 Règle de Cramer

Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, on a que $x = A^{-1}b$ s'écrit $x = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A} \quad \text{avec} \quad B_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{colonne } j \end{array}$$

<u>Principe de la preuve:</u>

Développer det B_j en cofacteurs de la jème colonne, c'est-à-dire $b \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\det B_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} \quad , \quad A_{ij} = Co(A)_{ji}$$

C'est le jème coefficient de $Co(A)^T b$

Rappel : $Co(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} = déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j.

Puisque $A^{-1} = \frac{1}{\det A} Co(A)^T$, on a bien

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}.$$

4.3 Volume d'un parallélépipède

Propriété : On a pour $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}^n$
$|\Delta(x_1, x_2, \dots x_n)|$ = volume du parallélépipède P construit sur les n vecteurs $x_1, x_2, \dots x_n$.

dém : Cette propriété n'est pas évidente !!

1er cas : On suppose que le parallélépipède P est rectangle. Soit $x_1, x_2, \dots x_n$, $\|x_i\| = l_i$, $l_i > 0$ et $x_i^T x_j = 0$ $i \neq j$.

On a $A = [x_1, x_2, \dots x_n]$

$$A^T A = \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix} [x_1 \; x_2 \dots x_n] = \begin{bmatrix} x_1^T x_1 & & & \\ & x_2^T x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n^T x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & l_n^2 \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\det(A^T A) = l_1^2 l_2^2 \dots l_n^2 = \det A^T \det A = (\det A)^2$$

donc $|\det A| = l_1 l_2 \dots l_n = \mathrm{vol}(P)$

$2^{ème}$ cas : le parallélépipède est non rectangle

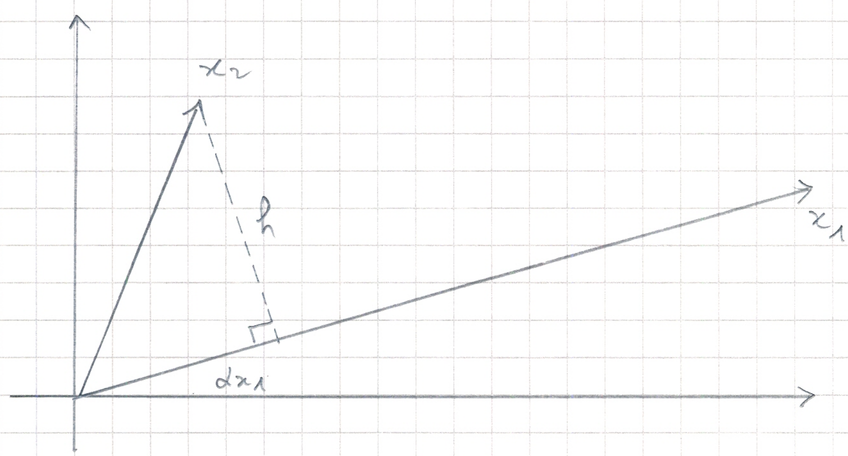
Dans ce cas, on a, avec $A = [x_1, x_2 \dots x_n]$

$$A^T A = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \dots & x_n^T x_1 \\ & & \\ x_1^T x_n & & \|x_n\|^2 \end{pmatrix} = \text{matrice de Gram de } x_1, x_2 \dots x_n$$

On a $\mathrm{vol}(P) = |\mathrm{Gram}(x_1, \dots x_n)|^{1/2}$

où $\mathrm{Gram}(x_1 \dots x_n) = \det(A^T A)$. On peut démontrer ceci par récurrence sur la dimension n. Alternative :

Cas de la dimension 2 :



$\mathrm{Vol}(x_1, x_2) = \|x_1\| h = l_1 \|x_2 - \alpha x_1\|$

où α est évalué tel que αx_1 = projection orthogonale de x_2 sur $\mathrm{Vect}(x_1)$

On a $|\det(x_1, x_2)| = |\det(x_1, x_2 - \alpha x_1)|$

$= \|x_1\| \, \|x_2 - \alpha x_1\| = \mathrm{Vol}(P)$

avec

$$\begin{cases} \alpha_{21} x_1 = \text{projection de } x_2 \text{ sur Vect}(x_1) \\ \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 = \text{projection de } x_3 \text{ sur Vect}(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \alpha_{n1} x_1 + \dots + \alpha_{n,n-1} x_{n-1} = \text{projection de } x_n \text{ sur Vect}(x_1 \dots x_{n-1}) \end{cases}$$

4.4. <u>Géométrie dans l'espace</u>

Application de ce qui précède : savoir utiliser la formule sur le volume pour effectuer des calculs de distance, de surface et de volume dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}^n$.

On introduit le produit vectoriel $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}$ de $n-1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par :

$x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ est l'unique vecteur tel que

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1})^T y = \det(x_1, \dots x_{n-1}, y)$$

(<u>représentation d'une forme linéaire</u>)

Il résulte des propriétés du déterminant que

1) $(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1}) \perp x_j \qquad 1 \leq j \leq n-1$

2) $\| x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_{n-1} \| = \mathrm{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(P(x_1 \dots x_{n-1})\right)$

$= \left| \mathrm{Gram}\,(x_1 \dots x_{n-1}) \right|^{1/2}$

Application :

1) distance d'un point M à un plan H

$$d(M,H) = \frac{\mathrm{vol}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AM})}{\mathrm{Vol}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \qquad \text{où } H = (A, B, C)$$

2) Volume d'une pyramide