J.-P. CROISILLÉ
28/12/12

Endomorphismes symétriques

Applications.

En complément de la leçon de A. Guillin.

1 - Orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques

Une application classique est la diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques.

On considère sur $\mathbb{R}^n$ deux formes quadratiques q_0 et q. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^n$ orthogonale à la fois pour q_0 et q ?

Dans le cas où q_0 est définie positive la réponse est positive :

Proposition 1 : Soit q_0 et q deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$, avec q_0 définie positive. Alors il existe une base orthogonale pour q_0 et q simultanément.

dém. Preuve matricielle : on part d'une décomposition de Schur symétrique de A^0 : il existe Q orthogonale et Λ^0, diagonale, $\Lambda^0 = \mathrm{diag}(\lambda^0_1, \dots \lambda^0_n)$, $\lambda^0_i > 0$ tel que

$$A^0 = Q^T \Lambda^0 Q$$

On pose $Q' = (\Lambda^0)^{1/2} Q$, donc

$$A^0 = Q'^T Q'$$

On connaît à présent la matrice

$$Q'^{-T} A Q'^{-1}$$ qui est toujours symétrique

Donc à nouveau, par le théorème de Schur symétrique, il existe P_1 orthogonale et Λ diagonale t.q

$$Q'^{-T} A Q'^{-1} = P_1^T \Lambda P_1$$

ce qui donne :

$$A = (P_1 Q')^T \Lambda (P_1 Q')$$

et aussi

$$A^0 = (P_1 Q')^T P_1 Q'$$

Donc les vecteurs colonne de la matrice $P_1 Q'$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, qui est orthogonale à la fois pour la forme quadratique q^0, définie par

$$q_0(x) = \frac{1}{2} x^T A^0 x$$

et pour la forme quadratique q, définie par

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x$$

cqfd

Qu'en est-il si on enlève l'hypothèse "q^0 définie positive" et qu'on la remplace par "q^0 non dégénérée" ?

<u>Proposition 2:</u> Si on suppose que q^0 est une forme quadratique non dégénérée, alors il existe une base orthogonale pour q^0 et q si et seulement si $(A^0)^{-1} A$ est diagonalisable, où A^0 et A sont les matrices symétriques associées à q^0 et q :

$$q^0(x) = \frac{1}{2} x^T A^0 x$$

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x .$$

dém: Preuve matricielle à nouveau:

Dire qu'il existe une base orthogonale commune à q^0 et q, équivaut à dire qu'il existe une matrice orthogonale P (dont les vecteurs colonnes sont la base en question) telle que

$$P^{-1} A^0 P = \Lambda^0 \quad \text{diagonale} \qquad (P^T = P^{-1})$$

$$P^{-1} A P = \Lambda \quad \text{diagonale}$$

On a alors

$$(\Lambda^0)^{-1} \Lambda = (P^{-1} (A^0)^{-1} P)(P^{-1} A P) = P^{-1} (A^0)^{-1} A P$$

Donc $(A^0)^{-1} A$ est diagonalisable !

Réciproquement, supposons qu'il existe une matrice P orthogonale telle que

$$P^T A^0 P = \Lambda^0 \quad \text{soit diagonale.}$$

On suppose que P satisfait également

$$P^{T}(A_0^{-1} A)P = M \quad \text{diagonale}$$

et on veut montrer que $P^T A P$ est aussi diagonale.

On a :

$$P^T A P = P^T A^0 \underbrace{(A^0)^{-1} A P}_{PM}$$

$$= P^T A^0 P M$$

$$= \Lambda^0 M \quad \text{qui est diagonale} \quad \text{cqfd.}$$

Pour une preuve qui n'utilise pas les matrices, cF Lelong-Ferrand - Arnaudiès, Tome 1 (Algèbre), p416, qq.

"Endomorphismes symétriques" et formes quadratiques.

① Si φ est une forme bilinéaire non dégénérée sur E, espace vectoriel, alors on peut définir pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'adjoint u^* de u <u>par φ</u> par

(1) $\varphi(u(x), y) = \varphi(x; u^*(y))$

Donc la notion d'adjoint dépend de φ en général [on a vu la notion d'adjoint pour φ = produit scalaire euclidien]

On définit $\mathcal{S}_\varphi(E)$ = les endomorphismes symétriques dans (1), c.a.d, ceux tels que $u^* = u$

On a:

1) L'application $u \in \mathcal{S}_\varphi(E) \to \psi_u$ définie par $\psi_u(x,y) = \varphi(u(x), y)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_\varphi(E)$ sur l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E.

2) Dire pourquoi la PROPOSITION 1 est équivalente à l'affirmation:

" Soit Φ une Forme quadratique déFinie positive et ψ une autre Forme quadratique. Alors il existe une base Φ orthonormée et ψ - orthogonale ".

Exercice: Soit $\varphi(x,y) = \langle u(x), y\rangle$, où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et u symétrique (au sens habituel). Alors la signature de q, Forme quadratique associée à la Forme bilinéaire φ, est (r,s) avec r = nombre de valeurs propres >0 de u et s = nombres de valeurs propres <0.

2 - Classification des quadriques dans $\mathbb{R}^3$

Une application classique est la classification des quadriques dans $\mathbb{R}^3$.

Une quadrique est $S = \{ M(x,y,z) \text{ t.q. } f(x,y,z) = 0 \}$ avec

$$f(x,y,z) = \overbrace{Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy}^{\Phi(x,y,z)}$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D$$

On effectue le changement de base correspondant à la base (e_1, e_2, e_3) orthogonale pour Φ et orthonormée pour le produit euclidien. Dans cette base

$$\Phi(X,Y,Z) = s_1 X^2 + s_2 Y^2 + s_3 Z^2$$
$$f(X,Y,Z) = \Phi(X,Y,Z) + 2EX + 2FY + 2GZ + D'$$

On obtient une classification de la forme suivante

	Equations réduites	Type de quadriques
$\delta = S_1 S_2 S_3 \neq 0$	Il existe $(\omega, e'_1, e'_2, e'_3)$ orthonormée t.q. $M(x', y', z') \in S \iff S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + S_3 z'^2 + D'' = 0$	• $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{ellipsoïde} \\ -1 & \emptyset \\ 0 & \omega \end{cases}$ • $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 & \text{hyperboloïde 1 nappe} \\ -1 & \text{hyperboloïde 2 nappes} \\ 0 & \text{cône} \end{cases}$
$S_1 S_2 \neq 0$ $S_3 = 0$	• $G \neq 0$ Equation de la Forme $S_1 x^2 + S_2 y^2 + 2Gz = 0$ dans (ω, e_1, e_2, e_3), avec ω bien choisi • $G = 0$ Equation de la Forme $S_1 x^2 + S_2 y^2 + D'' = 0$	• $Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$ paraboloïde elliptique • $Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$ paraboloïde hyperbolique • cylindres
$S_3 \neq 0$ $S_1 = S_2 = 0$ $e = 2\sqrt{E^2 + F^2}$	• $e \neq 0$ Il existe un repère $(\omega, e'_1, e'_2, e'_3)$ tel que l'équation de S soit $0 = S_3 z^2 + ey$ • $e = 0$ Il existe ω t.q. l'équation de S soit $0 = S_3 z^2 + D'$	• cylindre parabolique • $\emptyset$ ou 2 plans parallèles