C. H

Leçon n° 156 - I (19 septembre 2012 C. Heimburger)

Valeurs propres - Recherche et utilisation

(remarques et compléments)

Plan :

1 - Définition, propriétés élémentaires

- Rester en dimension finie
- Conserver le point de vue matriciel
- Exemples significatifs :
  - a) algébriques : matrices symétriques,
  - b) géométriques : matrice d'une symétrie

2 - Calcul des valeurs propres

- Calcul a priori difficile : pas de formule algébrique donnant les valeurs propres en fonction des coefficients (pas de résolution d'un polynôme de d° ≥ 5 par radicaux).
On cherche donc des algorithmes de calcul approché

- Localisation géométrique
Disques de Gerschgörin ⇒ localisation grossière
Donner un exemple prouvant cet aspect

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad Sp(A) \subset \underbrace{\mathcal{C}((3,0),2) \cup \mathcal{C}((4,0),1) \cup \mathcal{C}((5,0),4)}_{\mathcal{C}((5,0),4)}$$

Permet de dire toutefois que $0 \notin Sp(A)$, donc $A \in Gl_n(\mathbb{R})$

NB: Preuve de Gerschgörin très simple!
(ne pas la proposer)

- Résolution approchée du polynôme caractéristique

Principe: dans le cas où les valeurs propres sont simples, partant d'une approximation on applique la méthode de Newton au polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$.

- Méthode de la puissance (Hämmerlin & Hoffmann) p 105 sqq.

Proposition:

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable
Soit $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ et $z^{(k)}$ définie par

$$z^{(k)} = A\, z^{(k-1)} \qquad k \geq 1$$

On note $\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres avec

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

et $q_{j_0}^{(k)} = \dfrac{z_{j_0}^{(k)}}{z_{j_0}^{(k-1)}}$ avec j_0 indice tel que $x^1_{j_0} \neq 0$, où $x^1 \in \mathbb{C}^n$ est vecteur propre associé à λ_1.

On a:

(i) Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $\lim\limits_{k \to +\infty} q_{j_0}^{(k)} = \lambda_1$

(ii) Si $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_m| > |\lambda_{m+1}|$, $m < n$
Alors on peut avoir plusieurs cas de figure :
$q_{j_0}^{(k)}$ peut avoir plusieurs valeurs d'adhérence

(iii) Dans le cas où A est hermitienne alors en notant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres et $\tilde{\lambda} = \lambda_1$ ou λ_n (la valeur propre de plus grand module), on a convergence quadratique du quotient de Rayleigh

$$\frac{z^{(k)*} A \, z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|^2}$$

vers $\tilde{\lambda}$.

démonstration : [trop long pour 15' – Proposer un extrait]

(i) les valeurs propres de A sont rangées de sorte que
$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots \geqslant |\lambda_n|$.

On décompose $z^{(0)}$, vecteur initial, sur une base $\{x^1, \dots x^n\}$ de vecteurs propres de A :

$$z^{(0)} = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$$

NB : les x^i sont inconnus !

On peut supposer que $z^{(0)}$ est choisi de sorte que $\alpha_1 \neq 0$

Le vecteur $z^{(k)}$ se décompose sur $\{x^1, \dots x^n\}$

$$z^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k x^1 + \alpha_2 \lambda_2^k x^2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k x^n$$
$$= \lambda_1^k \left[\alpha_1 x^1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x^2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x^n\right]$$

<u>Cas (i)</u> : Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, alors on a

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{z^{(k)}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 x^1$$ car chaque suite (dans $\mathbb{C}^n$!!)

$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k$, $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k$, ... $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k$ tend vers 0

[bien préciser pourquoi !!],

On fixe une coordonnée j_0 t.q. $x^1_{j_0} \neq 0$
(il en existe une car x^1 est vecteur propre)

Donc $z^{(k)} \sim \alpha_1 \lambda_1^k x^1$ ("$\sim$" veut dire "équivalent" préciser la définition exacte)

et donc $z^{(k)}_{j_0} \sim \alpha_1 \lambda_1^k x^1_{j_0}$

$$q^{(k)} := \frac{z^{(k)}_{j^0}}{z^{(k-1)}_{j^0}} \xrightarrow{k \to +\infty} \lambda_1$$

N.B : Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'hypothèse $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ implique $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?) et dans ce cas, tout en réel dans les itérations.

<u>Cas (ii)</u> : $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_m| > |\lambda_{m+1}| \geq |\lambda_{m+2}| \dots$

Dans ce cas, le comportement de la suite $q^{(k)}$ peut varier.

Si par exemple $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$, alors on a toujours

$$\lim_{k \to +\infty} q^{(k)} = \lambda_1 \quad \text{(pourquoi?)}$$

Si par exemple $\lambda_2 = -\lambda_1$, alors

$$z^{(2k')} = \lambda_1^{2k'} \left[\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + y^{(2k')} \right]$$

$$z^{(2k'+1)} = \lambda_1^{2k'+1} \left[\alpha_1 x^1 - \alpha_2 x^2 + y^{(2k'+1)} \right]$$

avec $\lim_{k \to +\infty} y^{(k)} = 0$

Dans ce cas la suite $\dfrac{z_{j_0}^{(k)}}{z_{j_0}^{(k-1)}}$ oscille

entre 2 valeurs d'adhérence qui sont

$$\lambda_1 \frac{\alpha_1 x_{j_0}^1 - \alpha_2 x_{j_0}^2}{\alpha_1 x_{j_0}^1 + \alpha_2 x_{j_0}^2} \text{ et } \lambda_1 \frac{\alpha_1 x_{j_0}^1 + \alpha_2 x_{j_0}^2}{\alpha_1 x_{j_0}^1 - \alpha_2 x_{j_0}^2} \quad \text{(pourquoi?)}$$

Par contre

$$z^{(2k'+2)} = \lambda_1^{2k'+2} \left[\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + y^{2k'+2} \right]$$

et on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{z_{j^0}^{k+2}}{z_{j^0}^{k}} = \lambda_1^2$$

Cela fournit λ_1 si le signe est connu par ailleurs.

(iii) Une dernière observation concerne le cas d'une matrice hermitienne $A^* = A$.

Dans ce cas, on sait que les quotients de Rayleigh permettent de caractériser la plus grande et plus petite valeur propre (qui sont réelles !) de A.

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n .$$

(1) $\lambda_1 = \max\limits_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 = 1}} x^* A x$; $\lambda_n = \min\limits_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 = 1}} x^* A x$

— Notons $\tilde{\lambda}$ la valeur propre de plus grand module :

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 \quad \text{si} \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_n|$$
$$\tilde{\lambda} = \lambda_n \quad \text{si} \quad |\lambda_n| \geq |\lambda_1|$$

A cause de (1) on a,

$$\frac{x^* A x}{\|x\|^2} = \tilde{\lambda} + O\left(\|x - x^*\|\right)^2 \quad [\text{pourquoi ?}]$$

Donc

$$t^k := \frac{(z^k)^* A z^k}{\|z^k\|^2} \text{ converge vers } \tilde{\lambda} \text{ de façon}$$

quadratique et avec le signe correct :

$$t^k \nearrow \tilde{\lambda} \quad \text{si} \quad \tilde{\lambda} = \lambda_1$$

$$\text{et} \quad t^k \searrow \tilde{\lambda} \quad \text{si} \quad \tilde{\lambda} = \lambda_n .$$

$\blacksquare$

Fin du plan :

- Mentionner l'algorithme QR uniquement si on se sent à l'aise.

3 - Applications, utilisation

- Utilisations élémentaires : Nature d'une conique (sert dans d'autres leçons)
- Utilisation dans l'étude du comportement asymptotique des suites définies par récurrence et des EDO (sera détaillée plus tard)

- Utilisation pour la transformée de Fourier rapide (sera détaillé plus tard)

4 – Valeurs propres en dimension infinie

Mentionner quelques exemples.
Exemple possible : séries de Fourier.