Université de Lorraine - UFR MIM
Préparation à l'agrégation interne de mathématique (2016-2017)
Module *Algèbre linéaire*

Devoir 1

Algèbre linéaire

1- Exponentielle matricielle et équations diférentielles linéaires
1) Montrer que l'application N de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$N(X,Y) = (X^2 + \frac{1}{2}Y^2)^{1/2} \tag{1}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dans toute la suite on notera indifféremment pour $V = (X,Y) \in \mathbb{R}^2$, $N(X,Y) = \|V\|$ ou $N(X,Y) = \|(X,Y)\|$.
2) A tout réel t non nul, on associe l'endomorphisme L_t de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3t} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Pour tout réel $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$, montrer qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que pour $t \geq t_0$,

$$\|L_t(X,Y)\| \leq k\|(X,Y)\|, \ \ (X,Y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

On fixe k et t_0 de la sorte dans la suite.
3) Soit $V_0(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit la suite de fonctions $Z_n(t) = (X_n(t), Y_n(t))$, $t \geq 0$, par récurrence par

$$X_0(t) = a, \ \ Y_0(t) = b, \tag{4}$$

$$\begin{cases} X_{n+1}(t) = a + \int_{t_0}^t \left[-\frac{2}{3\lambda}X_n(s) + \frac{1}{4}Y_n(s)\right] ds, \\ Y_{n+1}(t) = b + \int_{t_0}^t X_n(s)ds. \end{cases} \tag{5}$$

Montrer que

$$\|Z_1(t) - Z_0(t)\| \leq k|t - t_0|\|V_0\|, \ \ t \geq t_0, \tag{6}$$

puis que $n \geq 1$,

$$\|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)\| \leq k \int_{t_0}^t \|Z_n(s) - Z_{n-1}(s)\|ds, \ \ t \geq t_0. \tag{7}$$

4) Montrer que pour $t \geq t_0$, $n > p \geq 0$,

$$\|Z_n(t) - Z_p(t)\| \leq \|V_0\| \sum_{m=p+1}^{n} \frac{k^m(t-t_0)^m}{m!}. \tag{8}$$

5) Montrer que la suite $Z_n(t)$ converge uniformément sur tout intervalle $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, vers une fonction $Z(t)$.

6) On considère le système dynamique

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \tag{9}$$

satisfaisant la condition initiale $X(t_0) = a$, $Y(t_0) = b$. Montrer que (9) possède une unique solution sur $[t_0, +\infty[$.
(*D'après épreuve 2, agrégation interne 1991*).

2- Topologie sur les matrices, exponentielle et logarithme matriciels
$\mathbb{C}[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. C'est un espace vectoriel normé avec

$$\| \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \| = \sup_{0 \le i \le n} |a_i|. \tag{10}$$

Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, on rappelle qu'il existe un unique couple $(D, N) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, où D est diagonaliaable et N nilpotente tel que $DN = ND$ et $A = D + N$. On rappelle enfin que si $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, l'exponentielle de M est définie par

$$\exp(M) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^i}{i!}. \tag{11}$$

On désigne par $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et soit s l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$s(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i). \tag{12}$$

1) Montrer que s est une application continue et surjective.
2) Soit $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_n = 1$. Montrer que si z est une racine de P dans $\mathbb{C}$ on a $|z| \le 1 + \|P\|$. (On pourra envisager les deux cas $|z| \le 1$ et $|z| > 1$).
3) Montrer que l'application de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$A \mapsto (-1)^n \chi_A(\lambda) \tag{13}$$

est continue. (NB: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ désigne le polynôme caractéristique de A.)
4) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes appartenant à $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \backslash s(\Omega)$ convergente vers $P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel k, on considère $(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k})$ tel que $s(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n,k}) = P_k$.
a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(\lambda_{\sigma(1),k}, \cdot, \lambda_{\sigma(n),k})$, n'appartient pas à Ω et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout i et tout k, $|\lambda_{i,k}| \le M$. NB: $\mathfrak{S}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble à n éléments.
b) Déduire de la question a) que $P \notin s(\Omega)$.
5) Montrer que si ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres appartiennent à ω est un ouvert non vide de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
6) Soit U l'ensemble des matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres satisfont $|\Im(\lambda)| < \pi$. NB: $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$.
a) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices N pour lesquelles il existe un entier p tel que $N^p = 0$. On note $p(N)$ le plus petit entier ayant cette propriété. On considère l'ensemble $\mathcal{L} = \{I_n + N\}$ où $N \in \mathcal{N}$. Pour $v = I_n + N \in \mathcal{L}$, on définit le logarithme $\ln(v)$ par

$$\ln(v) = \ln(I + N) = \sum_{q=1}^{p(N)-1} \frac{(-1)^{q+1} N^q}{q}. \tag{14}$$

(i) Montrer que si $X \in \mathcal{N}$, alors $\exp(X) \in \mathcal{L}$.
(ii) Soient $X \in \mathcal{N}$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$f(t) = \ln(\exp(tX)). \tag{15}$$

Montrer que f est dérivable, que $f'(t) = X$ et que pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = tX$. (On pourra écrire $\exp(tX) = I_n + Z(t)$).
(iii) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{N}$, on a $\ln(\exp(X)) = X$.
c) Montrer que si $D, D' \in \mathcal{U}$ sont diagonalisables et telles que $\exp(D) = \exp(D')$, alors $D = D'$. (On pourra montrer que D et D' ont les mêmes sous-espaces propres).
d) Montrer que la fonction $\exp$ est injective sur U. (On pourra décomposer une matrice M de U en la somme de deux éléments appropriés et utiliser les questions 6.b (iii) et 6.c.)
(*D'après épreuve 1, agrégation interne 1997*).

3- L'image numérique d'une matrice
L'objet de l'exercice est l'étude de l'*image numérique* d'une matrice. L'image numérique d'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des nombres complexes

$$\mathcal{F}(A) = \{x^* Ax, \text{ où } x \in \mathbb{C}^n \text{ vérifie } \|x\| = 1\}. \tag{16}$$

(On rappelle que $\|x\| = x^* x$). De même que le spectre, c'est un ensemble du plan complexe qui joue un rôle important dans des questions telles que la stabilité des systèmes dynamiques associés à la matrice A. Le but de l'exercice est l'étude de quelques propriétés de l'image numérique.
1) Déterminer $\mathcal{F}(A)$ dans les cas suivants

$$i)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ii)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad iii)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

2) Montrer que si A est une matrice diagonale de $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(A)$ est l'enveloppe convexe des éléments diagonaux de A. (NB: dans un espace affine, l'enveloppe convexe d'un ensemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des $\sum_{i=1}^p \alpha_i P_i$, $P_i \in \mathcal{S}$ et α_i tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1, p \geq 1$).
3) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.
4) Montrer que si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$(i)\ \ \mathcal{F}(A + \alpha I_n) = \mathcal{F}(A) + \{\alpha\}, \quad (ii)\ \ \mathcal{F}(\alpha A) = \alpha \mathcal{F}(A). \tag{18}$$

5) Montrer que $\mathcal{F}(A)$ contient $\mathrm{Sp}(A)$ (le spectre de A) ainsi que les éléments diagonaux $a_{i,i}$ de A.
6) a) Montrer que toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique $A = H(A) + iS(A)$ où $H(A)$ et $S(A)$ sont hermitiennes.
b) Comparer $\mathcal{F}(H(A))$ et l'ensemble des $x = \Re(z)$ lorsque z parcourt $\mathcal{F}(A)$.
7) Pour $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathcal{F}(A + B) \subset \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B)$. A-t-on $\mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B) \subset \mathcal{F}(A + B)$?
8) Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne, déterminer $\mathcal{F}(A)$ à l'aide de $\mathrm{Sp}(A)$. NB: On donnera une réponse faisant intervenir $\min(\mathrm{Sp}(A)$ et $\max(\mathrm{Sp}(A))$.
(*D'après épreuve 1, agrégation interne 1999*).
NB: De nombreuses questions sur l'image numérique d'une matrice demeurent ouvertes à l'heure actuelle. Le problème de 1999, épreuve 1 est une étude de l'image numérique d'une matrice. Le chapitre 1 du livre de R.A. Horn et C.R. Johnson *Topics in matrix analysis* est consacré à l'image numérique.