MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2017

Rapport de jury présenté par : Thierry Goudon

Président du jury

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport est prioritairement destiné aux futurs candidats ainsi qu'aux centres de préparation et à leurs intervenants. Il fait un bilan de la session 2017, détaille les attentes du jury pour les sessions suivantes et décrit quelques insuffisances les plus marquantes qui ont pu être relevées durant les épreuves. Ainsi, il fournit :

— un corrigé commenté des épreuves écrites d'admissibilité, en indiquant les erreurs les plus fréquentes et les défauts de rédactions observés,

— des recommandations pour les épreuves orales d'admission.

Le jury insiste sur le fait qu'il convient, de manière générale, d'assurer des bases solides et de faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. Il n'est nul besoin de chercher à s'écarter du programme pour prétendre à des notes très satisfaisantes. Si ce rapport indique aussi des pistes pour explorer des problématiques connexes au programme mais techniquement plus ambitieuses, il encourage avant tout les préparations et les candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases. Comme cela était rappelé sur les convocations aux épreuves orales, le jury en recommande une lecture très attentive qui permettra aux centres de préparation d'adapter au mieux leurs enseignements et aux candidats de bien calibrer leurs efforts. Les candidats sont aussi invités à consulter le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques, à l'adresse www.agreg.org, où se trouvent de nombreuses archives utiles et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent aussi trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Chapitre 2

Déroulement du concours et statistiques

2.1 Déroulement du concours

Le concours comprend deux épreuves écrites d'admissibilité — une composition de mathématiques générales et une composition d'analyse-probabilités — et trois épreuves orales d'admission : algèbre et géométrie, analyse et probabilités, modélisation. Les candidats ont le choix entre quatre options. Les options A, B, C ne diffèrent que par les épreuves de modélisation, respectivement probabilités et statistiques, calcul scientifique, algèbre et calcul formel, alors que les trois épreuves orales de l'option D (informatique) sont spécifiques. Comme dans les sessions précédentes, le nombre d'inscrits et de reçus est très similaire dans les trois premières options ; il est toujours nettement inférieur dans l'option D. Le jury se réjouit qu'un certain nombre d'universités aient fait connaître leurs projets d'ouverture de préparation spécifique à l'option informatique ; ces ouvertures pourront permettre d'élargir le vivier des candidats et de diversifier les profils avec des compétences étendues aux sciences numériques. Le choix de l'option n'a pas d'influence sur la réussite au concours, ni sur le classement. Afin de ne pas encourager l'élaboration de quelque stratégie fondée sur une analyse biaisée et conjoncturelle, le jury ne publie pas de données sur la répartition des candidats et des lauréats par option. Par ailleurs le jury veille scrupuleusement dans l'élaboration du programme, la conception des sujets et la définition de ses attentes à ne privilégier aucune option. Le choix de l'option doit exclusivement être mis en cohérence avec la formation et les goûts des candidats ; chaque option ouvre des champs applicatifs des mathématiques qui trouveront leur impact dans le futur métier du professeur agrégé.

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2017 se sont déroulées

- le jeudi 23 mars 2017 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le vendredi 24 mars 2017 pour l'épreuve d'analyse et probabilités,

et la liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 12 mai 2017. Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient la France, le Maroc et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en Tunisie et au Maroc ; les barres d'admissibilité pour les étudiants de ces deux pays est au moins égale à celle de la barre fixée par le jury français.

Les épeuves d'admission se sont déroulées du lundi 19 juin au mardi 4 juillet 2017. La liste d'admission a été publiée le mercredi 5 juillet 2017. Le déplacement de l'agrégation à Lille (lycée Pasteur) est un fait marquant de l'édition 2017. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation papier, indiquant les trois jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission. Toutefois, pour connaître les horaires précis d'interrogation, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires étaient, par défaut, invités à se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure sera reconduite l'an prochain.

Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac−3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale www.devenirenseignant.gouv.fr En vue de la session 2018, le jury a jugé opportun de faire évoluer le programme ; le programme 2018 est disponible à l'URL media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/59/3/p2018_agreg_ext_math_759593.pdf. Le présent rapport détaille des attentes qui correspondent à ces évolutions et le jury recommande fortement aux futurs candidats de prendre connaissance de ces indications.

Le jury conseille finalement aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Afin de les guider, l'inspection générale collecte les textes réglementaires relatifs aux différentes situations que les lauréats de l'agrégation externe peuvent rencontrer et édite une note indiquant les recommandations correspondantes igmaths.org/spip/spip.php?rubrique17. Le statut des doctorants agrégés suscitant régulièrement de nombreux questionnements, il convient d'attirer l'attention sur la circulaire du 29 novembre 2016 ayant pour objet l'application des dispositions du décret 2009-464 du 23 avril 2009 relatif aux doctorants contractuels des établissements publics d'enseignement supérieur ou de recherche, dans sa version modifée par le décret 2016-1173. La note de service 2016-174 du 15 novembre 2016 www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=108981 concernant les procédures de détachement affecte les opportunités pour les agrégés qui bénéficient d'un contrat doctoral et valident leur stage par un service d'enseignement dans l'enseignement supérieur. Le jury s'inquiète de ces dispositions, susceptibles de gravement perturber le fonctionnement et l'attractivité des formations de l'enseignement supérieur, y compris celles conduisant vers la recherche en mathématiques, puisque la préparation au concours de l'agrégation joue, traditionnellement, un rôle structurant majeur dans ces formations.

2.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2017

2.2.1 Commentaires généraux

Le nombre de postes ouverts au concours a augmenté de manière très significative à partir de 2013 ; avec 457 postes, l'agrégation externe de mathématiques représente près du quart du total des postes ouverts sur l'ensemble des agréations externes. Pour apprécier l'évolution de 2016 à 2017, il convient de prendre aussi en compte les 15 postes ouverts au titre du nouveau concours externe spécial réservé aux docteurs, innovation de la session 2017. Ce concours spécial fait l'objet d'un rapport indépendant. Après la diminution sensible du nombre de postes entre les concours 2005 (388 postes) et 2008 (252 postes), ce nombre a augmenté légèrement jusqu'en 2012. Depuis la session 2013, une rupture nette a été constatée :

Année	2013	2014	2015	2016	2017
Postes ouverts	391	395	457	467	457
Concours spécial					15

L'importance du nombre de postes ouverts ramène à la situation des années 1992–1996 où 480 postes étaient proposés. Cependant à cette époque il y avait près de 1000 étudiants présents lors des épreuves écrites ; ils n'étaient qu'un peu plus de 370 (plus 86 normaliens) cette année. Autrement dit la population des candidats a notablement changé, changement qui affecte la physionomie du concours.

Parmi les 3582 inscrits, 1668 ont été présents aux deux épreuves écrites. On constate depuis plusieurs années une forte participation de professeurs en exercice (1574 certifiés inscrits). De fait, à l'heure actuelle, les concours de l'agrégation interne et externe se recouvrent et le concours externe présente une opportunité réelle de promotion pour des enseignants en exercice. On compte un peu moins de 4 présents par poste. Au-delà de ces chiffres sur le nombre de présents, la faiblesse du nombre d'étudiants est une source de vive inquiétude non seulement pour le jury mais plus largement pour toute la communauté éducative. Le fait que le nombre d'étudiants soit significativement moindre que le nombre de postes ouverts au concours, sans rien enlever aux mérites et aux qualités des candidats relevant d'autres catégories, ne peut être satisfaisant.

Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
3582	1668	1658	809	635	305

Évolution du nombre de candidats aux différents stades du concours

Admissibilité À l'issue de la délibération d'écrit portant sur deux épreuves (Mathématiques générales et Analyse-Probabilités), 809 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une moyenne de 20/20 et le dernier une moyenne de 5/20.

Le jury a maintenu une position adoptée depuis plusieurs années face à cette situation qui combine un nombre de postes élevé et un vivier restreint de candidats qu'on peut qualifier de « naturels » pour ce concours. Ainsi, le jury maintient un rapport postes/admissibles de l'ordre de 0,5. En restant honnête sur le niveau des prestations écrites, ceci conduit à fixer une barre d'admissibilité assez basse. D'ailleurs un nombre significatif de candidats déclarés admissibles ont été écartés du concours faute de pouvoir justifier de l'obtention d'un M2. Le jury, tout en regrettant le manque de vitalité du vivier de candidats, n'est pas surpris que les formations universitaires, garantes de la qualité de leurs diplômes, aient jugé que certains candidats admissibles ne pouvaient pas être déclarés reçus au M2.

Néanmoins, en déclarant admissibles des candidats dont les notes d'écrit peuvent être considérées comme modestes, le jury souhaite se donner tous les moyens de pourvoir les postes ouverts au concours, et donner l'occasion aux candidats de compenser la faiblesse de ces résultats par des prestations d'oral convaincantes. Cette stratégie permet en effet à certains candidats parmi les plus mal classés des épreuves écrites de très bien tirer leur épingle du jeu durant les épreuves orales et on relève des « remontées » assez remarquables lors des épreuves d'admission (une fraction des admis présente une moyenne des notes d'écrit inférieure à 5,6 et même parmi les 200 premiers reçus on trouve des candidats avec une moyenne d'écrit inférieure à 8/20). En contrepartie, le jury estime, compte tenu des missions du professeur agrégé, que lorsque la combinaison des résultats obtenus sur l'ensemble des épreuves est trop faible, avec des faiblesses avérées sur de larges pans du programme, les candidats ne peuvent être admis à ce concours. Force est de constater, et de déplorer, que cette exigence ne permet pas de pourvoir tous les postes ouverts au concours lors de cette session.

Les deux épreuves écrites ont donné des résultats très homogènes ; moyennes et écarts-types des présents sur les épreuves écrites sont résumés dans ce tableau

	Moy. admissibles	Ecart-type admissibles
MG	8,22	3,24
AP	8,33	3,22

Le jury rappelle que la correction des copies est maintenant **dématérialisée** : les correcteurs ne travaillent pas directement sur les copies-papier, mais sur une version numérisée de celles-ci. Signaler cette évolution technique redonne l'occasion de conseiller d'apporter le plus grand soin à la présentation des copies.

Admission Lors des passages des candidats, le jury ne dispose d'aucune information particulière : les notes d'écrit, les notes obtenues aux oraux précédents, la profession, *etc.* demeurent inconnues des commissions d'évaluations. Le jury note selon les mêmes critères, avec une grille stricte commune à toutes les commissions, toutes les personnes à partir de leur seule prestation. Des tests statistiques sont faits très régulièrement pour guider l'harmonisation entre les commissions et la présidence du concours veille sur les indicateurs, à la fin de chaque série, lors de réunions avec les secrétaires de commission. Le jury a la volonté de noter les candidats de manière positive et bienveillante et cherche à valoriser toutes les connaissances et les aspects positifs des prestations des candidats.

Le jury rappelle que les épreuves d'admission d'un concours ont un caractère public. Ce principe général s'applique évidemment au concours de l'agrégation de mathématiques et les candidats ne peuvent s'opposer à la présence d'auditeurs (ce qui serait quelque peu paradoxal pour des candidats à des fonctions d'enseignant). Le jury incite donc très fortement les futurs candidats et les préparateurs à venir assister aux épreuves et à s'appuyer sur cette expérience pour se préparer au mieux aux épreuves.

Comme les années passées, le jury n'a pas attribué l'ensemble des postes ouverts au concours. Finalement, à l'issue des épreuves orales, 305 candidats ont été déclarés admis ; le premier admis a eu une moyenne de 20/20, le dernier admis une moyenne de 8,1/20. La situation du concours se révèle donc particulièrement stable : la barre d'admission est inchangée depuis 2015 et le nombre de lauréats identique à celui de la session 2016.

Le jury rappelle qu'un concours n'est pas un examen : le but n'est pas de valider des connaissances. Les notes attribuées ne sont pas des jugements de valeur sur les candidats et n'ont aucun caractère « absolu » ; il ne s'agit que de discriminer au mieux une population donnée dans un contexte donné et à un instant donné. Toute la plage de notes de 0 à 20 est utilisée. Le jury insiste aussi sur le fait qu'il convient de passer toutes les épreuves. **Tous les ans, on déplore l'abandon de candidats qui étaient en position d'être reçus.** Quels que soient leurs sentiments à l'issue d'une interrogation, les candidats sont donc très fortement encouragés à se présenter aux épreuves suivantes. Le jury se réjouit d'une baisse significative du taux d'abandons observée lors de cette session. Les moyennes et écarts-types des présents **à l'oral** sur les différentes épreuves sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	9	8,5	8,2	8,6	8,6
écart-type	4,8	4,8	4,5	3,4	3,4

Moyennes et écarts-types des candidats présents à l'ensemble des épreuves

	Oral Alg-G	Oral Ana-P	Oral Mod	Ecrit MG	Ecrit AP
moyenne	12,4	11,9	11,2	10,7	10,8
écart-type	4	3,8	3,9	3,5	3,4

Moyennes et écarts-types des candidats admis

Ces données offrent l'occasion de rappeler le conseil de ne négliger aucune des épreuves. En particulier, l'épreuve de modélisation, avec son format original qui donne beaucoup d'autonomie au candidat, permet de tester des qualités différentes. Elle requiert des capacités de synthèse importantes puisque les textes font appel à des notions présentes dans tout le programme et mettent les énoncés « en situation ». De même, s'il est valorisant de savoir illustrer sur ordinateur un propos mathématique, cette compétence ne s'improvise pas et réclame un minimum de préparation.

On résume dans le tableau ci-dessous les barres d'admission depuis 2008 :

Année	Nombre de postes attribués	Barre d'admission
2017	305	8,1/20
2016	304	8,1/20
2015	274	8,1/20
2014	275	8,48/20
2013	323	7,95/20
2012	308	8,1/20
2011	288	9,33/20
2010	263	9,8/20
2009	252	10,15/20
2008	252	10,1/20

Seuls 305 postes sur les 457 proposés ont été attribués. Le recrutement de professeurs agrégés de mathématiques ne peut se faire que sur des critères de qualités scientifiques et pédagogiques répondant à un minimum, eu égard aux missions actuellement fixées aux agrégés. Ce minimum a été placé cette année, comme ces deux dernières années, à 162/400. Cette stabilité du concours, accompagnée par l'excellent niveau de la tête du concours, est encourageante. Réussir le concours de l'agrégation externe requiert un minimum de préparation et cette stabilité repose d'abord sur l'engagement et la qualité des formations universitaires. Cependant, l'impossibilité de pourvoir les postes témoigne de l'insuffisance patente et préoccupante d'une population étudiante souhaitant s'orienter vers l'enseignement des mathématiques, puisqu'on compte seulement 250 candidats environ issus des préparations universitaires. Déplorer la faiblesse du volant de candidats étudiants n'empêche pas le jury d'être respectueux, et même quelque peu admiratif, des efforts des enseignants en poste dans le secondaire qui se confrontent à ce concours. Ils forment la catégorie la plus représentée parmi les inscrits et représentent 30% des admissibles environ. Le jury n'a nul doute que l'immense majorité d'entre eux est certainement constituée d'excellents enseignants de mathématiques, même si les résultats obtenus à ce concours peuvent leur paraître parfois frustrants. Il est indiscutable que les enseignants certifiés admissibles à ce concours ont acquis des compétences techniques qui dépassent largement celles de l'enseignant certifié moyen mais le défaut de préparation d'une forte proportion d'entre eux leur laisse le concours difficile d'accès. L'indéniable volonté de progression de plus de 1500 personnes inscrites au concours issues de ces corps, confrontées à des moyens trop faibles consacrés à la formation continue et à la difficulté à obtenir des congés formation, mériterait d'être davantage soutenue.

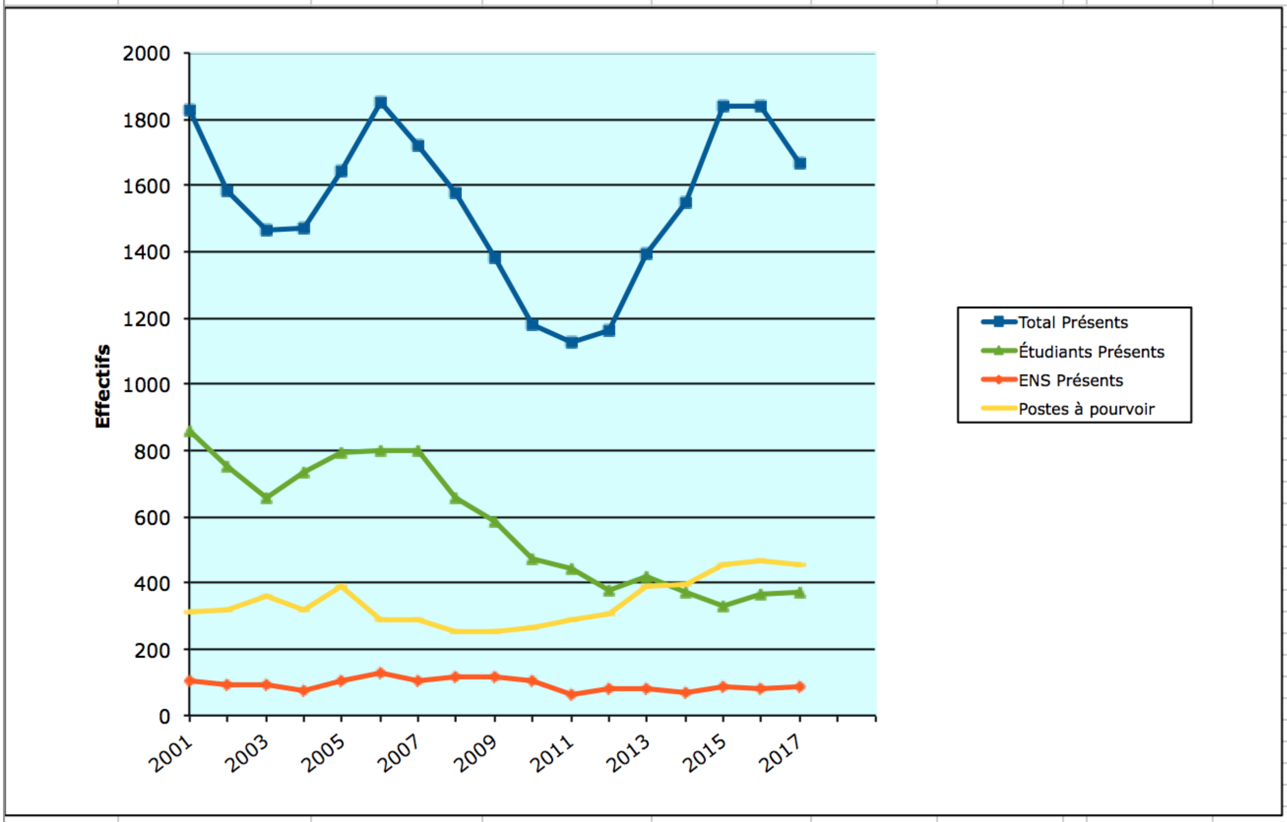
2.2.2 Données statistiques diverses

On trouvera dans les pages qui suivent différents tableaux et graphiques constituant le bilan statistique du concours selon différents critères (géographie, sexe, catégorie professionnelle, âge). Toutes ces statistiques portent sur les candidats qui peuvent être admis au concours, en particulier ces chiffres n'incluent pas les étudiants marocains et tunisiens.

Effectifs détaillés

Année	Total Inscrits	Total Présents	Etudiants Présents	ENS Présents	Postes à pourvoir	Présents par poste
2001	**2663**	**1828**	857	105	310	**5,9**
2002	**2343**	**1584**	753	95	320	**5,0**
2003	**2217**	**1463**	657	93	360	**4,1**
2004	**2333**	**1470**	735	76	321	**4,6**
2005	**2560**	**1644**	795	105	388	**4,2**
2006	**2849**	**1853**	800	129	290	**6,4**
2007	**2801**	**1722**	800	106	290	**5,9**
2008	**2491**	**1579**	659	119	252	**6,3**
2009	**2351**	**1384**	585	116	252	**5,5**
2010	**2332**	**1177**	474	106	263	**4,5**
2011	**2500**	**1124**	445	62	288	**3,9**
2012	**2673**	**1163**	379	82	308	**3,8**
2013	**2673**	**1393**	420	81	391	**3,6**
2014	**3001**	**1546**	371	72	395	**3,9**
2015	**3252**	**1841**	328	89	457	**4,0**
2016	**3525**	**1841**	364	78	467	**3,9**
2017	**3582**	**1668**	374	86	457	**3,6**

Évolution du nombre de présents aux deux épreuves d'écrit



Courbes de l'évolution des effectifs

Professions et Diplômes

Profession	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CERTIFIE	1574	742	737	237	141	16
SANS EMPLOI	336	96	95	53	42	26
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	331	309	309	259	243	142
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	180	48	47	18	15	7
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	179	85	85	31	24	5
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	141	54	52	8	6	
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	139	66	66	41	31	15
ELEVE D'UNE ENS	95	86	86	86	80	78
PLP	54	23	23	3	2	
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	53	14	14	7	4	3
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	43	13	13	3	2	
ETUDIANT EN ESPE EN 2EME ANNEE	40	21	21	9	9	6
PROFESSEUR ECOLES	37	5	5	3		
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	32	7	6	4	3	
MAITRE CONTR.ET AGREE REM TIT	28	12	12	6	4	
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	27	15	15	11	7	3
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	26	6	6	3	1	
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	26	9	9	3	3	1
PROFESSIONS LIBERALES	24	6	6	4	3	
ETUDIANT EN ESPE EN 1ERE ANNEE	24	11	11	4	2	
PERS FONCTION PUBLIQUE	20	2	2	2	1	1
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	19	3	3	3	3	1
PROFESSEUR ASSOCIE 2ND DEGRE	17	1	1			
AGREGE	17	2	2			
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	17	5	5	3	2	1
MAITRE AUXILIAIRE	12	4	4	2	2	
ASSISTANT D'EDUCATION	10	4	4			
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	9	3	3	3	3	
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	8	2	2			
FONCT STAGIAIRE FONCT PUBLIQUE	7	5	5	2	2	
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	6	2	2			
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	5					
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	5					
ETUD.HORS ESPE (PREPA PRIVEE)	5					
ARTISANS / COMMERCANTS	4	1	1			
PROF DES ECOLES STAGIAIRE	4	1	1			
EMPLOI AVENIR PROF.2ND D.PUBLI	4	1	1	1		
INSTITUTEUR	3					
MAITRE CONTR.ET AGREE REM MA	3					
PEPS	3	1	1			
MAITRE DELEGUE	3					
PEGC	2	1	1			
PERSONNEL DE DIRECTION	2	1	1			
CONTRACTUEL FORMATION CONTINUE	1					
VACATAIRE APPRENTISSAGE (CFA)	1					
AGRICULTEURS	1					
PERS FONCT TERRITORIALE	1					
CPE STAGIAIRE	1	1	1			
AGENT ADMI.MEMBRE UE(HORS FRA)	1					
AG NON TIT FONCT TERRITORIALE	1					
FONCT STAGI FONCT TERRITORIALE	1					

Résultat du concours par catégories professionnelles[1]

1. Les catégories professionnelles et les catégories par diplômes listées correspondent aux déclarations des candidats lors de l'inscription : elles ne font l'objet d'aucune vérification et doivent être considérées avec prudence.

Diplôme	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
MASTER	1569	853	848	486	421	243
ENSEIGNANT TITUL-ANCIEN TITUL CAT A	665	305	304	111	64	7
DIPLOME D'INGENIEUR (BAC+5)	544	204	203	79	58	20
DOCTORAT	245	80	80	38	29	11
DIP POSTSECONDAIRE 5 ANS OU +	172	71	70	18	10	3
DIPLOME GRANDE ECOLE (BAC+5)	148	64	64	37	31	16
GRADE MASTER	94	38	37	18	10	5
DISP.TITRE 3 ENFANTS	82	31	30	13	9	
ADMIS ECH.REM.CERTIFIE PLP PEPS	40	16	16	7	3	
DIPLOME CLASSE NIVEAU I	21	6	6	2		
CPE TITULAIRE - ANCIEN TITULAIRE	2					

Diplômes des candidats hors étudiants tunisiens et marocains

Ces résultats par grandes catégories confirment que le concours de l'agrégation externe de mathématiques est un concours de recrutement de nouveaux enseignants ; c'est d'ailleurs bien sa fonction première. La catégorie cumulée des étudiants en mathématiques (ENS et hors ENS) constitue près de 71% de l'effectif des admis. La catégorie des étudiants inscrits en ESPE désigne des titulaires d'un Master 2 et inscrits en première année d'ESPE ; cette catégorie regroupe un ensemble assez varié de personnes dont il n'est pas clair qu'il s'agisse d'étudiants ayant suivi des filières en mathématiques. Le nombre de titulaires d'un diplôme d'ingénieur est significatif et compte un certain nombre de candidats, qui se sont révélés performants, nourrissant un projet de reconversion professionnelle. Bien qu'un concours spécial réservé aux titulaires d'un doctorat ait été ouvert cette année, 80 docteurs se sont présentés au concours. Parmi eux, 38 ont été admissibles et seulement 11 ont franchi la barre d'admission. Le concours spécial proposait 15 postes et 10 candidats ont été déclarés admissibles. Cette population de candidats docteurs comprend des profils très variés : titulaires d'une thèse dans une discipline connexe aux mathématiques (informatique, mécanique, physique, sciences de l'ingénieur, automatique...) ou docteurs en mathématiques, avec des thèses plus ou moins anciennes. Une fraction de ceux-ci s'oriente vers ce concours en raison des tensions actuelles sur l'emploi universitaire et du tarissement des postes d'enseignants-chercheurs au niveau maître de conférences. Le taux de réussite assez faible de ces candidats, alors que certains d'entre eux ont une expérience d'enseignement dans le supérieur, est préoccupant. Il démontre que le concours est exigeant et nécessite une préparation spécifique, un entraînement pour être capable de convaincre de sa solidité sur les bases du programme et non de sa dextérité sur des notions très pointues. Le jury encourage les préparations universitaires et les écoles doctorales à proposer de valider la participation à des enseignements de préparation au concours au titre de la formation doctorale en vue de l'insertion professionnelle. Cette formation en cours de thèse pourrait constituer un renforcement disciplinaire intéressant pour les doctorants et élargir le public des préparations, notamment les plus petites d'entre elles, qui pourraient trouver ainsi, parmi les doctorants non encore agrégés (par exemple des doctorants venus d'autre pays de l'Union européenne ou des doctorants ingénieurs) une population motivée, un peu plus mature, capable de jouer un rôle d'émulation dans les promotions.

Répartition selon le sexe Le tableau suivant donne les répartitions en fonction du sexe. Il y a un fort déséquilibre hommes-femmes puisque l'on compte 23% d'admis femmes. Les femmes représentaient 31% des présents à l'écrit et 26% des admissibles. La correction des épreuves écrites se fait de manière totalement dématérialisée et le jury ne dispose d'absolument aucune information sur les candidats : il n'a accès à ce moment-là qu'aux copies repérées par un numéro. Il est donc difficile d'imaginer quelle mesure pourrait permettre d'identifier et corriger un éventuel biais, pour autant qu'il y en ait un dans cette étape du concours. Le taux de réussite des candidats hommes (reçus/admissibles) est de 51%, celui des femmes est de 44%. Toutefois, ces taux passent à 42% et 41% respectivement si la population des candidats normaliens, qui compte seulement 10% de femmes, est exclue du calcul. Le jury, composé de plus de 42% de femmes, a mis en place des processus de veille sur les enjeux de parité et s'est interrogé en permanence sur ses pratiques afin de chercher à éliminer les biais susceptibles de s'introduire dans l'évaluation.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
Homme	2466	1156	1148	603	473	235
Femme	1116	512	510	206	162	70

Répartition selon l'âge Le tableau ci-dessous décrit les répartitions des lauréats en fonction de leur âge. Ce tableau confirme que l'agrégation externe permet de recruter des jeunes enseignants. Les jeunes (moins de 27 ans) constituent l'essentiel des admis au concours. Cependant des candidats plus avancés en âge, jusqu'à 57 ans, se sont aussi présentés avec succès lorsqu'ils ont pu bénéficier d'une bonne préparation.

Age	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
21	5	4	4	4	4	4
22	44	41	41	36	34	27
23	185	170	170	145	133	95
24	195	159	159	124	106	69
25	171	96	96	57	52	27
26	164	94	94	44	40	14
27	154	63	62	26	22	12
28	141	51	50	14	11	3
29	120	63	62	24	20	6
30	154	61	61	24	16	4
31	142	55	55	13	9	1
32	130	40	39	12	9	3
33	106	38	38	16	6	1
34	113	45	44	22	15	
35	115	41	41	14	10	4
36	105	38	38	19	15	6
37	102	43	42	18	14	1
38	98	35	35	15	9	2
39	110	56	54	23	12	3
40	110	41	41	18	12	5
41	94	39	39	9	4	
42	72	30	30	8	6	2
43	105	44	44	13	10	1
44	108	34	34	14	7	2
45	71	25	25	9	6	
46	85	33	32	13	8	3
47	77	31	30	9	8	1
48	69	26	26	6	4	1
49	74	30	30	13	4	1
50	66	22	22	5	1	
51	47	19	19	7	5	2
52	46	19	19	5	3	1
53	47	17	17	5	2	1
54	38	17	17	6	5	
55	24	10	10	2	1	
56	18	7	7	4	3	2
57	17	7	7	2	1	
58	16	7	7	4	3	1
59	11	3	3	1	1	
60	10	4	4	2	1	
61	4	2	2	2	1	
62	5	1	1	1	1	
63	3	1	1			
64	3	2	2	1	1	
65	7	4	4			
66	1					

Tableau de répartition des candidats en fonction de l'âge

Répartition selon l'académie La répartition des lauréats par académie se concentre clairement sur quelques centres (Paris-Créteil-Versailles, Rennes, Lyon et dans une moindre mesure Grenoble, Toulouse, Bordeaux, Nantes, Strasbourg) alors que l'académie de Besançon se distingue (depuis plusieurs années) par un excellent taux de réussite.

Cette concentration des admis sur quelques grandes métropoles françaises a diverses conséquences qu'il est difficile de prévoir ou de mesurer. L'une de ces conséquences est un déséquilibre entre les académies d'affection des stagiaires, en général l'académie d'inscription universitaire. Ainsi l'Ile-de-France est assez abondamment fournie alors que certaines académies ne reçoivent que quelques stagiaires agrégés. Il est donc conseillé aux lauréats de demander à effectuer leur stage dans des académies déficitaires dans lesquelles ils trouveront de bonnes conditions d'accueil. Les lauréats d'Ile-de-France n'auront pas la garantie de pouvoir effectuer leur stage en lycée. Par ailleurs, le jury s'inquiète de possibles impacts sur les formations universitaires qui pourraient être de nature à déséquilibrer l'attractivité des filières de mathématiques sur le territoire.

Academies	Inscrits	Présents	Composés	Admissibles	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	948	448	448	237	187	96
NICE	254	78	78	31	17	6
LYON	207	117	117	80	70	45
LILLE	161	83	83	28	22	5
TOULOUSE	161	67	67	41	34	13
AIX-MARSEILLE	159	82	76	31	21	7
POITIERS	154	25	25	11	6	1
RENNES	147	102	102	63	54	41
GRENOBLE	132	60	56	31	26	16
NANTES	129	65	65	29	25	10
MONTPELLIER	117	51	51	20	16	4
BORDEAUX	102	43	43	21	15	10
NANCY-METZ	101	54	54	25	19	9
ORLEANS-TOURS	100	50	50	20	15	5
STRASBOURG	93	45	45	22	17	10
ROUEN	88	35	35	8	6	1
LA REUNION	71	31	31	10	6	
AMIENS	65	37	37	17	13	1
CLERMONT-FERRAND	56	34	34	22	13	7
CAEN	49	26	26	15	12	3
REIMS	47	22	22	10	7	4
BESANCON	43	22	22	7	7	6
DIJON	43	23	23	12	11	4
MARTINIQUE	41	15	15	6	6	1
GUADELOUPE	32	10	10	3	3	
LIMOGES	19	12	12	1	1	
POLYNESIE FRANCAISE	16	10	10	2		
GUYANE	15	6	6	2	2	
MAYOTTE	14	4	4	1	1	
NOUVELLE CALEDONIE	12	6	6	1	1	
CORSE	6	5	5	2	2	

Répartition par académie

Les sociétés savantes collectent des informations sur les volumes horaires consacrés aux préparations selon les universités, données qui révèlent de très grandes disparités. Ainsi le nombre d'heures par an consacrées à la préparation au concours peut varier de 300 à plus de 1200 ! À ces différences de volume horaire s'ajoute la faiblesse des effectifs présents dans certaines préparations, alors que l'émulation et le travail en groupe jouent souvent un rôle important dans le succès des formations.

Les préparations doivent étudier l'évolution sur plusieurs années de leur taux de réussite au concours, certains résultats pouvant être purement conjoncturels. La mise au point d'un programme de préparation est un processus dynamique, exigeant, qui se fait en lien étroit avec l'élaboration des maquettes des formations et qui réclame de suivre les évolutions du concours. Le jury rappelle aussi aux candidats comme aux préparateurs que les épreuves orales sont publiques et que venir assister à des interrogations permet certainement de bien appréhender les attendus et les difficultés des épreuves.

Chapitre 3

Épreuve écrite de mathématiques générales

Le sujet est disponible à l'URL www.devenirenseignant.gouv.fr/cid111368/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2017.html ou sur le site agreg.org.

3.1 Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques générales

Le sujet commençait par trois exercices classiques préliminaires, puis se partageait en quatre parties. L'objet de la première partie était de démontrer la réduction de JORDAN d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie. La deuxième partie portait sur une démonstration du théorème du bi-commutant. La troisième proposait une version constructive de la décomposition de DUNFORD d'une matrice. Enfin, la quatrième partie traitait de la théorie des répliques de CHEVALLEY.

Les correcteurs constatent, avec plaisir, qu'à quelques exceptions près la présentation des copies est soignée.

Exercices préliminaires

L'exercice sur les matrices de rang 1 a été abordé par quasiment tous les candidats. L'idée générale était souvent présente mais la rédaction trop souvent imprécise. On peut attendre d'un futur enseignant qu'il soit capable de donner de manière synthétique, claire et précise tous les arguments utilisés.

Lorsque A est supposée de rang 1, de nombreux candidats n'ont pas pris le soin de préciser pourquoi les vecteurs X et Y tels que $A = XY$ sont non nuls. D'autres ont choisi pour Y la première colonne de A, qui peut parfaitement être nulle. Un argument du type « quitte à changer l'ordre des colonnes de A » n'a évidemment pas sa place ici.

Pour la réciproque, certains candidats ont posé $A = XY$ avec X et Y deux vecteurs non nuls, et en « déduisent » que le rang de A est 1 sans utiliser que les vecteurs sont non nuls.

Certains candidats ont tenté de justifier par une « preuve » la non-unicité : il est préférable de fournir un contre-exemple, car l'argument utilisé tombait parfois en défaut dans des cas particuliers. Par exemple, certains candidats ont utilisés que n'importe quelle colonne non nulle de A peut être choisie pour Y, et en ont « conclu » qu'il y avait plusieurs possibilités et donc non-unicité, mais ceci n'est pas valable pour une matrice ayant toutes ses colonnes égales.

L'exercice sur le dual a également été abordé par quasiment tous les candidats. Il y avait de nombreux points à vérifier ce qui, ici aussi, a rarement été entièrement fait. Beaucoup de candidats ont oublié de vérifier que l'application f_A est à valeurs dans $(\mathcal{M}_{n,m}(K))^*$, ou ont affirmé trop rapidement que « f_A est linéaire par linéarité de la trace ».

De même, après avoir montré l'injectivité de $f : A \mapsto f_A$, certains concluaient à la bijectivité car « on est en dimension finie », sans justifier que les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension, ou car « les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension » (sans préciser les dimensions, ou au moins qu'elles sont finies). Il faut, bien sûr, également préciser que la linéarité de f intervient pour pouvoir utiliser un argument de dimension.

Certains ont justifié l'injectivité de $A \mapsto f_A$ en utilisant le fait que $f_A(A) = \mathrm{tr}({}^tAA) = 0$ implique $A = 0$, ce qui est vrai sur $\mathbb{R}$ mais pas sur un corps quelconque contenant $\mathbb{Q}$.

L'exercice sur les matrices associées à une application linéaire donnée a été moins traité. La formulation ouverte a dérouté de nombreux candidats. D'autres ont correctement prouvé des conditions de rang ou de matrices équivalentes. Certains se sont contentés d'énoncer la définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases, ce qui n'est évidemment pas une réponse satisfaisante.

Une confusion entre matrice et application linéaire, sans doute, a mené des candidats à écrire des phrases étonnantes du type « En écrivant la matrice A dans une base bien choisie, on trouve ... ».

On ne pouvait bien entendu pas prendre des « bases canoniques » de E et F.

Partie I Réduction de Jordan

La question 1 a été assez bien traitée, que ce soit à l'aide d'un isomorphisme ou uniquement de la division euclidienne.

La question 2 a été abordée dans la majorité des copies, mais il manquait souvent la justification de la trigonalisablilité de u sur K.

La question 3a était classique et a été bien réussie. Le fait que X^k et Q soient premiers entre eux est évident ici mais il faut le signaler pour appliquer le lemme des noyaux (lemme qu'il était inutile de démontrer).

La suite de la question 3 a été plus discriminante.

En 3b, peu de candidats ont pensé à utiliser la trace pour conclure.

En 3c, une réponse correcte peut être de montrer que $G = \{0\}$, mais les correcteurs ont apprécié les candidats qui ont pris du recul et en ont déduit également que u était nilpotent, puis ont mis en valeur la condition nécessaire et suffisante de nilpotence.

Dans la question précédente et la suivante, il est fort étonnant de trouver au niveau de l'agrégation des non-sens tels que $Q(u(x))$ ou $(u(x))^k$. La conscience de la nature des objets manipulés et de leur diversité est une part importante de ce qu'un enseignant doit transmettre à ses élèves.

La question 4 ne posait pas de difficulté particulière, et a été globalement bien réussie. Il est cependant nécessaire de rappeler qu'il faut définir correctement les objets que l'on introduit, et que l'on ne peut pas se contenter d'une rédaction du type « comme $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base, $v(x_0) = \sum \lambda_i u^i(x_0)$ donc P existe ».

La question 5a été plus rarement abordée et peu réussie. La formulation ouverte a, là encore, déstabilisé une grande partie des candidats. Il semble pourtant normal qu'au niveau de l'agrégation, on puisse répondre à des questions de ce type et ne pas se contenter de démontrer des résultats déjà formulés.

La sixième question a été peu réussie. Il n'est évidemment pas pertinent ici d'évoquer la forme de Jordan que l'on est en train de construire. On peut attendre d'un futur professeur agrégé qu'il soit capable d'introduire un résultat qu'il va démontrer sur un exemple sans l'utiliser, et qu'il soit en mesure de traiter cet exercice classique de première année post-bac. Il s'agissait dans cette question de contrôler le rang de la matrice, puis de construire correctement des bases, et enfin de démontrer que ces familles sont des bases. Cela a été rarement bien mené.

Les correcteurs ont été surpris de constater une erreur logique grave : un certain nombre de candidats vérifient que les matrices données, élevées au carré, sont nulles et pensent avoir ainsi prouvé le résultat attendu.

La question 7a a été peu abordée. Il est à noter qu'au vu de la formulation, c'est une équivalence qui est attendue ici. De nombreux candidats ont oublié de montrer qu'un sous-espace de dimension 1 est cyclique et parmi ceux qui y ont pensé, peu ont vérifié la stabilité.

Seuls quelques rares candidats ont réussi à traiter correctement le reste de la question 7. En 7.c. il ne faut pas oublier de vérifier que l'image de u est de dimension strictement inférieure à la dimension de E pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence.

Partie II Bicommutant

Dans la première question, beaucoup de candidats se contentent de survoler la réponse d'un « il est clair que $\mathcal{CC}(u)$ et $\mathcal{CC}(v)$ sont isomorphes ». On attend un minimum de démonstration du résultat, même s'il s'agit d'un calcul très simple en étant rigoureux.

Les correcteurs ont constaté des confusions entre commutant et bicommutant.

La question 2 a été globalement bien réussie. Bien évidement, une justification, même très succincte, de $K[u] \subset \mathcal{CC}(u)$ était attendue.

Les question 3, 4 et 5 ont été moins abordées.

En 3, quelques candidats ont pensé à justifier que les calculs de déterminant ou l'application de l'algorithme de Gauss ne nécessitent pas de « sortir » du corps K. En revanche, certains se donnaient une K-base de L et essayaient d'exploiter l'indépendance linéaire des éléments de cette base. Comme les coefficients des relations de dépendance linéaire qu'ils considéraient étaient des éléments non pas de K, mais de K^n, cela n'avait pas de sens.

En 4, la plupart des candidats se sont arrêtés à $\pi_K|\pi_L$, ou ont continué avec des explications confuses.

En 5, de trop nombreux candidats ont oublié que $\dim(\mathcal{CC}(u)) = \deg(\pi_u)$ n'a pas été démontré en 2, et utilisent ce résultat !

Les question 6a et 6b ont été globalement réussies. Certains candidats ont ici encore été gênés par le fait d'introduire de nouveaux objets, qu'ils n'ont pas toujours définis correctement. En 6b, il est regrettable qu'un grand nombre de candidats ne montre qu'une inclusion entre le commutant et l'ensemble qu'ils ont trouvé. L'inclusion réciproque était immédiate au vu de ce qu'ils avaient déjà fait et a manifestement été oubliée. D'autres candidats ont fait une preuve par équivalence, bien menée.

En revanche, les question 6c et 6d ont rarement été correctement traitées.

En 6c, les candidats ont bien souvent conclu en montrant que les matrices du type $\begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix}$ appartenaient au bicommutant de M, mais sans justifier l'inclusion inverse ou alors seulement la forme « par blocs » des matrices.

Les questions 7a et 7b ne présentaient pas de difficulté. La première de ces questions a été globalement bien réussie, mais après avoir prouvé que $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(v)$, « on en déduit que $\mathcal{CC}(u) = \mathcal{CC}(v)$ » était un peu trop rapide alors qu'un « d'où $\mathcal{CC}(u) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(u)) = \mathcal{C}(\mathcal{C}(v)) = \mathcal{CC}(v)$ » satisfaisait pleinement le correcteur.

En 7b, l'argument de stabilité des sous-espaces cycliques, qui permet de justifier la forme « par blocs » de la matrice, a souvent été oublié.

Les questions 7c et 8 n'ont quasiment pas été abordées.

Partie III Décomposition de Dunford pour une matrice

Cette partie a été abordée par nombreux candidats jusqu'à la question 5.

Peu de candidats ont remarqué l'importance de l'hypothèse $\mathbb{Q} \subset K$ qui assure que le corps K soit de caractéristique 0. Ils ont été nombreux à faire, sans le formuler, comme si le corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En 1, plusieurs candidats ont récité une démonstration qu'ils connaissaient, sans se rendre compte que la définition de « semi-simple » donnée dans l'énoncé n'était pas celle que leur démonstration utilisait.

En 3, une justification, même rapide, du fait que P et P' sont premier entre eux était attendue. Notons au passage qu'un nombre non négligeable de candidats a semblé confondre « à facteurs simples » et « à racines simples », que ce soit dans la première question ou dans la troisième question, lorsque certains ont affirmé que « P et P' n'ont pas de racine commune, donc sont premiers entre eux », ce qui est a priori faux si l'on ne se place pas dans un corps de décomposition de P.

La question 4 n'a pas été très réussie, alors qu'elle ne présentait pas de difficulté autre que le fait de manier correctement des sommes. L'utilisation de développements limités ou de la formule de Taylor-Young n'avaient évidemment pas leur place ici.

La majorité des candidats qui ont abordé la cinquième question ont bien vu ce qu'il fallait faire, mais les correcteurs ont souvent constaté un manque de précision et d'attention dans le raisonnement (erreur de signe en appliquant la formule de la question 4, absence de justification que les matrices A_k et $P(A_k)S(A_k)$ commutent, qu'un polynôme en A_k est un polynôme en A ...).

La question 6 a été abordée par peu de candidats.

Partie IV Théorie des répliques de Chevalley

Cette partie a été peu abordée. Elle n'a été traitée correctement que par les toutes meilleurs copies.

Certains candidats ont essayé de « grappiller » des points. La plupart d'entre eux n'ont écrit que des trivialités ne conduisant pas au résultat demandé, ou alors des successions d'arguments non justifiés n'apportant rien. En 2.b. Les correcteurs ont vu des « formules » de déterminant blocs fantaisistes.

3.2 Corrigé de l'épreuve écrite de mathématiques générales

Exercices préliminaires.

Exercice 1 – Matrices de rang 1 Le rang d'une matrice A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes. Soit A une matrice de rang 1,et X une colonne non nulle de A. La j-ième colonne A_j de A est donc proportionnelle à X. Notons $A_j = y_j X$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. Posons $Y = (y_1 \cdots y_n)$. La matrice Y est non nulle car $A = XY$. Réciproquement les colonnes d'une telle matrice sont proportionnelles à la matrice colonne non nulle X, donc si Y est non nulle, la matrice est de rang 1. Cette écriture n'est pas unique, elle dépend du choix du générateur de la droite vectorielle engendrée par X. Les générateurs sont les $X' = \alpha X$, $\alpha \neq 0$, d'où si $Y' = \frac{1}{\alpha}Y$, $A = X'Y'$.

Exercice 2 – Dual de $M_{n,m}(K)$ L'application f_A est bien une forme linéaire de $M_{n,m}(K)$ comme composition de la multiplication par A, linéaire de $M_{n,m}(K)$, dans $M_m(K)$, et de la trace qui est une forme linéaire de $M_m(K)$. La vérification de la linéarité de l'application qui à A associe f_A provient aussi de la linéarité de la trace, en effet

$$\forall(\lambda, A, B, M) \in K \times M_{m,n}(K)^2 \times M_{n,m}(K),$$
$$Tr((\lambda A + B)M) = \lambda Tr(AM) + Tr(BM)$$

D'où

$$\forall(\lambda, A, B, M) \in K \times M_{m,n}(K)^2 \times M_{n,m}(K), f_{\lambda A+B} = f_{\lambda A} + f_B.$$

De plus si $A = (a_{i,j})$,

$$\forall A \in M_{n,m}(K), \forall(i,j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, \quad f_A(E_{i,j}) = a_{j\,i},$$

donc la forme linéaire f_A est nulle si et seulement si A est nulle.
On obtient donc une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension mn, c'est un isomorphisme.

Exercice 3 – Matrices associée à une application linéaire donnée Soit u une application linéaire de E dans F et A un élément de $M_{n,m}(K)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1}(u)$ la matrice de u relative aux bases $(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)$. Dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$, signifie que si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}$ et Q celle de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}$, alors par changement de base $A = Q^{-1}MP$. Cette relation matricielle caractérise le fait que A et M ont le même rang. On obtient donc que u admet la matrice A dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ si et seulement si le rang de u est égal au rang de la matrice A.

Partie I – Réduction de Jordan

1. L'homomorphisme d'évaluation de $K[X]$ dans $K[u]$ qui à P associe $P(u)$ est surjectif et donne par passage au quotient, un isomorphisme d'anneaux (donc aussi d'espaces vectoriels sur K) entre $K[X]/\pi_u$ et $K[u]$. En particulier l'anneau $K[u]$ est commutatif. Par division euclidienne par π_u tout polynôme en u s'écrit de façon unique sous la forme $R(u)$ où R est un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(\pi_u)$. Donc $\dim_K(K[u]) = \deg \pi_u$.
2. Supposons u nilpotent, alors le polynôme minimal de u est de la forme X^k avec $1 \leqslant k \leqslant \dim E$. En particulier le polynôme minimal est scindé et admet une seule racine multiple 0. Le polynôme caractéristique de u est donc X^n où n désigne la dimension de E, et par identification des coefficients de ce polynôme, $Tr(u) = 0$. De plus, pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, $(u^p)^k = 0$ donc u^p est nilpotent puis $Tr(u^p) = 0$.

3. On suppose que pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, $Tr(u^p) = 0$.
   (a) Si $\pi_u = X^k Q(X)$ avec $pgcd(X, Q) = 1$ alors X^k et Q sont premiers entre eux, et le lemme des noyaux donne
   $$\ker \pi_u(u) = \ker(u^k) \oplus \ker Q(u).$$
   D'où la décomposition $E = F \oplus G$.
   Si P est un polynôme, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie $P(u) \circ u = u \circ P(u)$. Pour un élément x de E vérifiant $P(u)(x) = O_E$, alors $u(P(u)(x)) = O_E$ puis $P(u)(u(x)) = O_E$. Le noyau $\ker P(u)$ est donc stable par u. Les sous-espaces F et G sont donc stables par u.
   (b) On suppose G non réduit à $\{0_E\}$, l'endomorphisme u_G de G induit par u est défini par :
   $$u_G : G \to G,\ \forall x \in G,\ u_G(x) = u(x).$$
   On en déduit
   $$\forall x \in G,\ Q(u_G)(x) = Q(u)(x),$$
   d'où $Q(u_G) = Q(u)_G$ et $Q(u_G) = O_{End(G)}$.
   Si $Q = X^\ell + a_{\ell-1}X^{\ell-1} + \cdots + a_0$, on obtient
   $$u_G^\ell + \cdots + a_0 Id_G = 0.$$
   En prenant la trace, il vient :
   $$Tr(u_G^\ell) + \cdots + a_0 \dim G = 0,$$
   or en caractéristique 0, a_0 et $\dim G$ étant non nuls, $a_0 \dim G$ est non nul. Il existe donc un entier $0 < j \leqslant \ell$ tel que $Tr(u_G^j) \neq 0$. Comme E est la somme directe des deux sous-espaces stables F et G, si $x = x_F + x_G$ est la décomposition d'un élément x de E comme somme d'un élément de F et de G, on a $u(x) = u_F(x_F) + u_G(x_G)$. La réunion d'une base de F et d'une base de G permet d'écrire la matrice de u sous forme diagonale par blocs, les blocs diagonaux correspondants à u_F et u_G.
   On a donc $Tr(u^j) = Tr(u_F^j) + Tr(u_G^j)$. Par définition de F, u_F est nilpotente donc $Tr(u_F^j) = 0$, puis $Tr(u^j) \neq 0$.
   (c) On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse de départ sur u. L'espace G est réduit à $\{0_E\}$ et $u^k = 0$. L'endomorphisme u est donc nilpotent.
4. Soit u un endomorphisme de E, on suppose u cyclique. Soit $x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0)$ une base de E et v un endomorphisme vérifiant $uv = vu$.
   (a) Puisque u est cyclique $v(x_0)$ s'écrit dans la base précédente. Il existe donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.
   (b) Pour tout ℓ dans $\{0, \cdots, n-1\}$
   $$\begin{aligned} v(u^\ell(x_0)) &= u^\ell(v(x_0)) \\ &= u^\ell(P(u)(x_0)) \\ &= P(u)(u^\ell(x_0)) \end{aligned}$$
   Donc v et $P(u)$ sont des applications linéaires qui coïncident sur la base $(x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0))$, d'où $v = P(u)$. Le commutant de u qui contient naturellement $K[u]$ est aussi contenu dans ce dernier, donc lui est égal.

5. On suppose l'endomorphisme u diagonalisable. Alors le polynôme minimal de u est scindé à racine simple. Si u est cyclique le polynôme minimal de u est de degré supérieur ou égal à la dimension de E, et comme il divise le polynôme caractéristique (CAYLEY-HAMILTON) de degré $\dim E$, et que ces deux polynômes sont unitaires, il est lui est égal. Donc χ_u est scindé à racines simples.
   Réciproquement supposons χ_u scindé à racines simples, alors $\chi_u = \pi_u$. Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de vecteurs propres pour u et $x_0 = \sum_{i=1}^n e_i$, alors la matrice des coordonnées des vecteurs $(x_0, \cdots, u^{n-1}(x_0))$ dans cette base est la matrice de Vandermonde $A = (\lambda_i^{j-1})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ de déterminant non nul, donc la famille $(x_0, \cdots u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   On a donc montré que l'endomorphisme u est cyclique.
6. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice 2, d'un espace vectoriel E de dimension 4. D'après le théorème du rang $\dim\ker u + \dim u(E) = \dim E$. De plus $u^2 = 0$ donc $u(E) \subset \ker(u)$. D'où $\dim u(E) \leqslant \dim\ker(u)$. Comme $\dim u(E) \geqslant 1$, les seules possibilités sont $(\dim u(E), \dim\ker u) \in \{(1,3),(2,2)\}$.
   - Dans le premier cas soit e_1 tel que $u(e_1) \neq O_E$, on pose $e_2 = u(e_1)$ c'est un élément non nul de $\ker u$. D'après le théorème de la base incomplète il existe e_3 et e_4 dans $\ker u$ tels que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $\ker u$. Comme e_1 n'appartient pas au noyau de u, (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E et la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$.
   - Dans le second cas on a $\dim u(E) = 2$, et il existe e_1 et e_3 tels que $(e_2, e_4) = (u(e_1), u(e_3))$ soit une base de $u(E)$. Alors on vérifie que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E. En effet on a
   $$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = O_E &\Rightarrow au(e_1) + cu(e_3) = O_E \\ &\Rightarrow (a,c) = (0,0) \end{aligned}$$
   puis L' indépendance de e_2 et e_4 donne $(b,d) = (0,0)$. La matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.
7. (a) Le sous-espace H étant contenu dans le noyau de u, pour tout vecteur non nul x de H le sous-espace cyclique engendré par x est $\mathbf{K}\cdot x$ donc de dimension 1. Réciproquement un sous-espace cyclique non nul de H est engendré par un vecteur non nul, dont les itérés sont nuls, donc est de dimension 1.
   (b) On a immédiatement $\sum_{i=1}^p \mathbf{K}[u](x_k) + H \subset E$.
   Pour tout x dans E, il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_k$ tels que $u(x) = \sum_{k=1}^p P_k(u)(y_k)$. D'où $x - \sum_{k=1}^p P_k(u)(x_k) \in \ker u$. Or $\ker u = (u(E) \cap \ker u) \oplus H$, d'où l'existence de polynômes Q_k, et d'un élément y de H, tels que
   $$x = \sum_{k=1}^p (P_k + XQ_k)(u)(x_k) + y.$$
   On a donc démontré l'égalité $E = \sum_{i=1}^p \mathbf{K}[u](x_k) + H$.
   Pour montrer que la somme est directe il reste à démontrer l'unicité de la décomposition d'un élément, ce qui se ramène, par linéarité, à l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Soient y dans H et $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes tels que $\sum_{k=1}^p P_k(u)(x_k) + y = O_E$. Alors $\sum_{k=1}^p P_k(u)(y_k) = O_E$, puis sachant que $u(E) = \bigoplus_{k=1}^p \mathbf{K}[u](y_k)$.
   $$\forall 1 \leqslant k \leqslant p, P_k(u)(y_k) = O_E$$
   On en déduit que si n_k est l'indice de nilpotence de u_{F_k} alors X^{n_k} divise P_k. Donc
   $$\forall 1 \leqslant k \leqslant p, P_k(u)(x_k) \in u(E) \cap \ker u = G.$$

Alors $y = -\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k)$ est dans $H \cap G$. Donc $y = O_E$ et $\sum_{k=1}^{p} P_k(u)(x_k) = O_E$. Or X divise P_k donc $P_k(u)(x_k) \in \mathbf{K}[u](y_k)$. On en déduit $P_k(u)(x_k) = O_E$ et le résultat $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbf{K}[u](x_k) \oplus H$.

(c) On conclut en constatant que toute base $(x_{p+1}, \cdots, x_{p+\dim H})$ de H donne une décomposition en sous-espace cyclique de dimension 1 de cet espace. Posons $G_k = \mathbf{K}[u](x_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant p + \dim H$. L'espace E est somme directe des sous-espaces G_i et l'endomorphisme u_{G_i} est cyclique pour tout $1 \leqslant i \leqslant \dim H + p$.

Partie II – Bicommutant

1. Si u et v sont des endomorphismes semblables de E, il existe un isomorphisme s de E tel que $v = sus^{-1}$. Comme la conjugaison par s est un automorphisme $\mathbf{K}$-linéaire de l'anneau $\mathcal{L}(E)$, le commutant de v est $\mathcal{C}(v) = s^{-1}\mathcal{C}(u)s$ et $\mathcal{CC}(v) = s\mathcal{CC}(u)s^{-1}$. D'où
$$\dim \mathcal{CC}(v) = \dim \mathcal{CC}(u).$$
2. Tout endomorphisme de $\mathcal{C}(u)$ commute avec les éléments de $\mathbf{K}[u]$, donc $\mathcal{CC}(u)$ contient $\mathbf{K}[u]$. L'égalité entre ces deux algèbres est donc équivalente à celle de leur dimension sur $\mathbf{K}$.
3. Si $M \in M_n(\mathbf{K})$, M est de rang r si et seulement s'il existe deux matrices P, Q de $GL_n(\mathbf{K})$ telles que
$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = PMQ^{-1}$$
Les matrices P et Q appartiennent aussi à $GL_n(\mathbf{L})$ donc le rang de M ne dépend donc du choix du surcorps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$.
4. On considère la matrice de $M_{n^2}(\mathbf{K})$ formée des coordonnées dans la base canonique des matrices $(M^{j-1})_{1 \leqslant j \leqslant n^2}$. Le rang de cette matrice est égal à la dimension de $\mathbf{K}[u]$ c'est à dire au degré du polynôme minimal de M agissant sur $\mathbf{K}^n$. Comme la base canonique de $M_n(\mathbf{K})$ est aussi celle de $M_n(\mathbf{L})$, les polynômes minimaux respectifs ont le même degré. Le résultat vient alors du fait que le polynôme minimal de M agissant sur $\mathbf{L}^n$ divise naturellement celui de M agissant sur $\mathbf{K}^n$, et que ces deux polynômes sont unitaires.
5. Soit $\phi_{\mathbf{L},M}$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbf{L})$ défini par $\phi_{\mathbf{L},M}(A) = AM - MA$. La matrice de $\phi_{\mathbf{L},M}$ dans la base canonique de $M_n(\mathbf{L})$ est aussi celle de $\phi_{\mathbf{K},M}$. Elle est donc dans $M_{n^2}(\mathbf{K})$ et son rang est lié à la dimension de $\mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M)$ par le théorème du rang :
$$\dim_{\mathbf{L}} M_n(\mathbf{L}) = r(\phi_{\mathbf{L},M}) + \dim_{\mathbf{L}} \ker \phi_{\mathbf{L},M}.$$
On en déduit
$$n^2 = r(\phi_{\mathbf{L},M}) + \dim_{\mathbf{L}} \mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M).$$
De même en raisonnant sur le corps $\mathbf{K}$,
$$n^2 = r(\phi_{\mathbf{K},M}) + \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{C}_{\mathbf{K}}(M).$$
En utilisant la question 3) on a $r(\phi_{\mathbf{L},M}) = r(\phi_{\mathbf{K},M})$, donc $\dim_{\mathbf{L}} \mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M) = \dim_{\mathbf{K}} \mathcal{C}_{\mathbf{K}}(M)$. Si $M_1, \ldots, M_\ell$ est une base de $\mathcal{C}_{\mathbf{K}}(M)$, la matrice des coordonnées des M_i dans la base canonique de $M_n(\mathbf{K})$ est à coefficients dans $\mathbf{K}$. Son rang sur $\mathbf{L}$ est donc le même que sur $\mathbf{K}$. On en déduit que $M_1, \ldots, M_\ell$ est une base de $\mathcal{C}_{\mathbf{L}}(M)$. Soit alors $\psi_{\mathbf{L}}$ l'application de $M_n(\mathbf{L})$ dans $\prod_{i=1}^{\ell} M_n(\mathbf{L})$ définie par $\psi_{\mathbf{L}}(A) = (AM_1 - M_1A, \cdots, AM_\ell - M_\ell A)$. C'est une application linéaire dont la matrice relative aux bases canoniques de $M_n(\mathbf{L})$ est à coefficient dans $\mathbf{K}$. En particulier $r(\psi_{\mathbf{L}}) = r(\psi_{\mathbf{K}})$, puis en utilisant le théorème du rang $\dim_{\mathbf{K}} \mathcal{CC}_{\mathbf{K}}(M) = \dim_{\mathbf{L}} \mathcal{CC}_{\mathbf{L}}(M)$.
6. On suppose que $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$, les polynômes π_A et π_B premiers entre eux et scindés et que A et B vérifie la conclusion du théorème du bicommutant.

(a) Les décompositions en blocs qui interviennent dans la suite sont compatibles avec celle donnée par l'énoncé, c'est à dire que le premier bloc sur la diagonal est de même taille que A. ($A \in M_p(\mathbf{K})$, $B \in M_{n-p}(\mathbf{K})$). On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} M &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$ est dans le commutant de M.

(b) Un calcul élémentaire donne :

$$\mathcal{C}(\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}) = \left\{ \begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix}, C \in M_p(\mathbf{K}),\, D \in M_{n-p}(\mathbf{K}) \right\}.$$

(c) Le bicommutant de M est contenu dans le commutant de $\begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}$. On remarque que le commutant de M contient les matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} C & O \\ O & D \end{pmatrix}$ où $C \in \mathcal{C}(A)$ et $D \in \mathcal{C}(B)$. Si $\begin{pmatrix} A' & O \\ O & B' \end{pmatrix}$ est dans le bicommutant de M, alors il est immédiat que A' doit être dans le bicommutant de A et B' dans le bicommutant de B. Donc il existe deux polynômes P et Q tels que $A' = P(A)$ et $B' = Q(B)$.

L'espace vectoriel des matrices de la forme $\begin{pmatrix} P(A) & O \\ O & Q(B) \end{pmatrix}$ est de dimension $\deg \pi_A + \deg \pi_B$. Le polynôme minimal de M est le pgcd de π_A et π_B. Comme ces deux polynômes sont premiers entre eux, $\pi_M = \pi_A \pi_B$. En particulier $\deg \pi_M = \deg \pi_A + \deg \pi_B$. La dimension du bicommutant de M est donc majorée par $\deg \pi_M$. Comme elle est minorée par $\deg \pi_M$, on a l'égalité, et le résultat demandé.

(d) D'après ce qui précède, la dimension du bicommutant de M est égale à celle de $\mathbf{K}[M]$, donc le bicommutant est bien égal à l'algèbre des polynômes en M. (En particulier si P et Q sont deux polynômes, il existe donc un polynôme T vérifiant $T(A) = P(A)$ et $T(B) = Q(B)$ ce qui pouvait se démontrer à l'aide du théorème des restes chinois pour les polynômes).

7. On suppose maintenant $u = \lambda \mathrm{Id}_E + n$ avec n nilpotent.

(a) Par un calcul direct, un endomorphisme commute avec u si et seulement s'il commute avec n, donc $\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(n)$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{CC}(u) &= \mathcal{C}(\mathcal{C}(u)) \\ &= \mathcal{C}(\mathcal{C}(n)) \\ &= \mathcal{CC}(n). \end{aligned}$$

(b) Par stabilité des sous espaces E_i la matrice de n est diagonale par blocs. Par choix de la base de E_i, le bloc correspondant à E_i est la matrice compagnon du polynôme $X^{\dim E_i}$ donc de la forme $C_{\dim E_i}$.

(c) On procède par récurrence sur le nombre de matrices compagnons.

i. Si la matrice est une matrice compagnon, l'endomorphisme n est cyclique, donc le commutant est $\mathcal{C}(n) = \mathbf{K}[n]$, puis $\mathbf{K}[n]$ étant une algèbre commutative, $\mathcal{CC}(n) = \mathbf{K}[n]$.

ii. Supposons le résultat vérifié dans le cas ou la matrice de n comporte k matrices compagnons C_{d_1},...,C_{d_k} de taille $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_k$. Soit n une matrice diagonale par blocs contenant $k+1$ blocs formés de matrices compagnons de taille $d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_k \leqslant d_{k+1}$. On considère la projection p sur $\bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k+1} E_i$. D'après l'étude faite en 6 b), qui ne fait pas intervenir le fait que π_A et π_B sont premiers entre eux, le bicommutant de M est contenu dans l'ensemble des matrices diagonales par blocs $\operatorname{diag}(P(\operatorname{diag}(C_{d_1}, \cdots, C_{d_k})), Q(C_{d_{k+1}}))$. Soit alors q_k définie par $q_{k|\sum_{i=1}^{k} E_i} = O$ et $q_k(R(n)(x_{k+1})) = R(n)(x_k)$ pour tout polynôme R de $\mathbf{K}[X]$. L'endomorphisme q_k est bien défini car si $R(n)(x_{k+1}) = 0$ alors $R(n)(x_k) = 0$ ($d_{k+1} \geqslant d_k$), et commute avec n. Alors si v est un élément du bicommutant de la forme $\operatorname{diag}(P(\operatorname{diag}(C_{d_1}, \cdots, C_{d_k})), Q(C_{d_{k+1}}))$, on a d'une part $v(q_k(x_{k+1})) = P(n)(x_k)$, et d'autre part $q_k(v(x_{k+1})) = q_k(Q(n)(x_{k+1}))$ soit encore $P(n)(x_k) = Q(n)(x_k)$ donc X^{d_k} divise $P-Q$, et v correspond à $Q(n)$. Le bicommutant de n est donc contenu dans, puis égal à $\mathbf{K}[n]$.

8. D'après II.5) on peut supposer le polynôme caractéristique de M scindé (en prenant pour L une clôture algébrique de K). Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de sous-espaces caractéristiques :
- L'initialisation, donc le cas où il n'y a qu'un seul sous-espace caractéristique associé à une valeur propre λ est traitée par la question 7).
- L'hérédité provient de la décomposition en somme directe des sous-espaces caractéristiques, en utilisant 6).

Partie III – Décomposition de Dunford pour une matrice

1. M est semi-simple si elle est diagonalisable dans une extension convenable de $\mathbf{K}$, ce qui revient à dire que le polynôme minimal de M dans cette extension est scindé à racines simples. D'après II.4 cela signifie que le polynôme minimal de M est à facteurs simples sur $\mathbf{K}$. Réciproquement en caractéristique 0, un polynôme irréductible devient scindé à racines simples dans une clôture algébrique, donc si π_M est à facteurs simples sur $\mathbf{K}$, il est scindé à racines simples dans une clôture algébrique de $\mathbf{K}$, et M est semi-simple.

2. Les polynômes π_A et χ_A ont les mêmes facteurs irréductibles. Donc P divise χ_A et à les mêmes facteurs irréductibles. De plus en caractéristique 0, le pgcd de χ_A et χ_A' admet pour facteurs irréductibles les facteurs multiples de χ_A avec une multiplicité diminuée de 1. D'où l'égalité des trois polynômes P, $\pi_A/pgcd(\pi_A, \pi_A')$ et $\chi_A/pgcd(\chi_A, \chi_A')$.

3. Comme le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique 0, il est parfait, donc tout polynôme irréductible est premier avec son polynôme dérivé. $P = P_1 \ldots P_k$. Si on note pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, $P = P_i Q_i$, alors $P' = P_i' Q_i + P_i Q_i'$. Alors P_i est premier avec P'. D'où P est premier avec P'. D'après le théorème de Bezout il existe R et S dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.

4. On raisonne par linéarité : Pour tout entier k on a d'après la formule du binôme de Newton, il existe un polynôme $Q_k(X,Y)$ de $\mathbf{K}[X,Y]$ tel que

$$(X+Y)^k = X^k + kX^{k-1}Y + Y^2 Q_k(X,Y)$$

Donc si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$P(X+Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2 \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(X,Y)$$

D'où le résultat en posant $Q(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(X,Y)$.

5. Par substitution on obtient

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbf{N}, P(A_{k+1}) &= P(A_k) - P(A_k)S(A_k)P'(A_k) + (P(A_k)S(A_k))^2 Q(A_k, -P(A_k)S(A_k)) \\ &= P(A_k)^2(R(A_k) + S(A_k)^2 Q(A_k, -S(A_k)P(A_k)))\end{aligned}$$

Puisque A_{k+1} appartient à $\mathbf{K}[A_k]$, on a l'inclusion $\mathbf{K}[A_{k+1}] \subset \mathbf{K}[A_k]$, et $P(A_{k+1}) \in P(A_k)^2\mathbf{K}[A_k]$. D'où par récurrence immédiate, A_k appartient à $\mathbf{K}[A]$, et $P(A_k)$ appartient à $P(A)^{2^k}\mathbf{K}[A]$. Dès que $2^\ell > max\{\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$, π_A divise P^{2^ℓ} donc $P(A_\ell) = 0$.

6. On a donc $A = A_\ell + (A - A_\ell)$. Comme P est à facteurs simples, A_ℓ est semi-simple. Par construction $A - A_\ell$ appartient à $P(A)\mathbf{K}[A]$ donc est nilpotent. De plus les polynômes en A commutent donc A_ℓ commute avec $A - A_\ell$. Supposons que $A = S + N$ soit une décomposition en somme d'une matrice semi-simple S et d'une matrice nilpotente N qui commutent. Alors S et N commutent avec A, donc avec les éléments de $\mathbf{K}[A]$. En particulier S, N, A_ℓ et $A - A_\ell$ commutent. Mais alors S et A_ℓ sont simultanément diagonalisables dans une extension convenable de $\mathbf{K}$, et $S - A_\ell = (A - A_\ell) - N$ est nilpotente. Donc $S - A_\ell$ est nulle, $S = A_\ell$ et $N = A - A_\ell$.

Partie IV – Théorie des répliques de Chevalley

1. (a) Si $E_{i,j}$ est la base canonique de $M_{np,mq}(\mathbf{K})$, le sous-espace vectoriel $M_{n,m}(\mathbf{K}) \otimes M_{p,q}(\mathbf{K})$ contient la base canonique de $M_{np,mq}(\mathbf{K})$, puisque

$$E_{(i-1)p+k,(j-1)q+\ell} = e_{i,j} \otimes f_{k,l}.$$

Il est donc égal à $M_{np,mq}(\mathbf{K})$.

(b) Par bilinéarité du produit tensoriel, si $(e_{i,j})_{i,j}$ et $(f_{k,\ell})_{k,\ell}$ sont des bases de $M_{n,m}(\mathbf{K})$ et $M_{p,q}(\mathbf{K})$, la famille $(e_{i,j} \otimes f_{k,\ell})_{(i,j),(k,\ell)}$ est une famille génératrice de $M_{n,m}(\mathbf{K}) \otimes M_{p,q}(\mathbf{K})$. Comme son cardinal est égal à la dimension de l'espace vectoriel, la famille $(e_{i,j} \otimes f_{k,\ell})_{(i,j),(k,\ell)}$ est une base de cet espace.

(c) La définition du produit tensoriel pour $\mathbf{K}^{n*} \otimes \mathbf{K}^{m*}$ et ce qui précède, permet d'interpréter, une fois une base choisie, le produit vectoriel $E^* \otimes F^*$. Soient $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ des bases de E et F, Soit (ϕ, ψ) un élément de $E^* \times F^*$ on note $\phi \otimes \psi$ la forme linéaire sur $E \otimes F$ définie par $\phi \otimes \psi(e_i \otimes f_j) = \phi(e_i)\psi(f_j)$. On obtient par linéarité de ϕ et ψ :

$$\forall (u, v) \in E \times F, \phi \otimes \psi(u \otimes v) = \phi(u)\psi(v).$$

D'après l' exercice préliminaire sur le dual de $M_{n,m}(\mathbf{K})$, l'application $M_{m,n}(\mathbf{K})$ dans $M_{n,m}(\mathbf{K})^*$ qui à une matrice A associe f_A est un isomorphisme. L'application θ de $M_{n,m}(\mathbf{K})^* \times M_{p,q}(\mathbf{K})^*$ dans $M_{np,mq}(\mathbf{K})^*$ définie par $\theta(f_A, f_B) = f_{A \otimes B}$ est bilinéaire, et induit une application linéaire $\overline{\theta}$ de $M_{n,m}(\mathbf{K})^* \times M_{p,q}(\mathbf{K})^*$ dans $M_{np,mq}(\mathbf{K})^*$, qui vérifie $\overline{\theta}(f_A \otimes f_B) = f_{A\otimes B}$. On vérifie que c'est un isomorphisme, en vérifiant que l'image d'une base de $E^* \otimes F^*$ est une base de $(E \otimes F)^*$.

2. (a) La matrice $A \otimes B$ est formée de n^2 blocs de taille m. Les n blocs diagonaux sont de la forme $a_{i,i}B$. On en déduit $Tr(A \otimes B) = Tr(A)Tr(B)$.

(b) On vérifie que $A \otimes B = (A \otimes I_m)\mathrm{diag}_n(B)$ où $\mathrm{diag}_n(B)$ est la matrice diagonale formée de n blocs égaux à B. On peut transformer la matrice $A \otimes I_m$ en faisant $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions sur les colonnes, pour regrouper les colonnes contenant les coefficients de la matrice A afin de reformer chaque ligne de A. On fait alors les mêmes $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions sur les lignes, pour obtenir une matrice diagonale par blocs, formée de m blocs égaux à A. D'où $\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$.

3. L'espace vectoriel $\mathcal{N}_{1,1}$ n'est autre que $\mathbf{K}^n \otimes (\mathbf{K}^n)^*$ soit $M_n(\mathbf{K})$. L'action de $A_{1,1}$ sur $M_n(\mathbf{K})$ se détermine sur la base $e_i \otimes e_j^*$ de $M_n(\mathbf{K})$. Soit
$$\begin{aligned} A_{1,1} \cdot (e_i \otimes e_j^*) &= Ae_i \otimes e_j^* - e_i \otimes e_j^* A \\ &= (\sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k) \otimes e_j^* - e_i \otimes \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} e_\ell^* \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k \otimes e_j^* - \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} e_i \otimes e_\ell^* \end{aligned}$$
D'autre part
$$A(e_i \otimes e_j^*) = \sum_{k=1}^n a_{\ell,i} e_\ell \otimes e_j^*$$
et
$$(e_i \otimes e_j^*)A = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} e_i \otimes e_\ell^*$$
D'où le résultat
$$A_{1,1} \cdot (e_i \otimes e_j^*) = [A, e_i \otimes e_j^*].$$
Par linéarité de l'action on obtient pour tout M dans $M_n(\mathbf{K})$, $A_{1,1} \cdot M = [A, M]$.
4. Soit $e_1, \dots e_n$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$, $f_1, \dots, f_n$ la base duale. On utilise l'isomorphisme canonique définit par
$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_s} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_r} \to {}^t f_{j_1} \otimes \cdots \otimes {}^t f_{j_r} \otimes {}^t e_{i_1} \otimes \cdots \otimes {}^t e_{i_s}.$$
5. Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbf{K})$, elle correspond à un changement de base de $\mathbf{K}^n$. L'expression de $\Phi_{P,r,s}$ sur une base de $\mathcal{N}_{r,s}$ de la forme $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}$ défini bien un unique endomorphisme de $\mathcal{N}_{r,s}$. Par linéarité du produit tensoriel par rapport à chaque composante, l'expression reste valable pour les tenseurs de la forme $X_1 \otimes \cdots X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_s$. De plus c'est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque $\Phi_{P^{-1},r,s}$.
6. Si A et B sont semblables, alors il existe une matrice P inversible dans $M_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Alors par identification sur la base de $\mathcal{N}_{r,s}$ formée à partir des e_i et des f_j,
$$\forall n \in \mathcal{N}_{r,s}, A_{r,s}.\Phi_{P,r,s}(n) = \Phi_{P,r,s}(B_{r,s}(n)).$$
Donc
$$B_{r,s} = \Phi_{P,r,s}^{-1} \circ A_{r,s} \circ \Phi_{P,r,s}.$$
Les endomorphismes obtenus $B_{r,s}$ et $A_{r,s}$ ont des matrices semblables.
7. (a) C'est immédiat en utilisant 5) et 6) et une base de vecteurs propres de A. Soit $u_1, \dots u_n$ une base de vecteurs propres, $Au_i = \lambda_i u_i$, et u_i^* la base duale $u_i^* A = \lambda_i u_i^*$. Si P est la matrice inversible telle que $Pe_i = u_i$, alors $P^{-1}AP = D$ est diagonale. La base formée des tenseurs $u_{i_1} \otimes \cdots \otimes u_{i_r} \otimes u_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes u_{j_s}^*$ est une base de vecteurs propres pour $A_{r,s}$, les valeurs propres correspondantes étant $\sum_{p=1}^r \lambda_{i_p} - \sum_{q=1}^s \lambda_{j_q}$.
   (b) On a pour tout entier k strictement positif
$$A_{r,s}^k.n = \sum_{\substack{n_1,\cdots,n_r \geqslant 0 \\ n_1+\cdots+n_r=k}} A^{n_1} X_1 \otimes \cdots \otimes A^{n_r} X_r - \sum_{\substack{m1,\cdots,m_r \geqslant 0 \\ m_1+\cdots+m_s=k}} Y_1 A^{m_1} \otimes \cdots \otimes Y_s A^{m_s}$$
   D'où si $k = n(r+s)$, pour chaque décomposition $n(r+s) = \sum_{i=1}^r n_i$ et $n(r+s) = \sum_{j=1}^s m_j$, l'un au moins des couples (A^{n_i}, A^{m_j}) est égal à $(0,0)$, donc $A_{r,s}^{n(r+s)} = 0$. L'endomorphisme $A_{r,s}$ est donc nilpotent.

8. (a) C'est la transitivité de la relation $\Rightarrow$.

   (b) C'est une conséquence directe de $(A_{r,s})_{r',s'} = A_{rr'+ss',rs'+sr'}$.

9. (a) Si A' est une réplique de A alors

$$\forall n \in \mathcal{N}_{1,1}, A_{1,1}.n = 0 \Rightarrow A'_{1,1}.n = 0.$$

   Or $\mathcal{N}_{1,1} = M_n(\mathbf{K})$, et $A_{1,1}(M) = [A, M]$ et $A'_{1,1}(M) = [A', M]$. Donc A' est dans le bicommutant de A. C'est un polynôme en A. De plus $A_{1,0}X = AX$ donc le noyau de A est contenu dans le noyau de A'. Si A n'est pas inversible, et si $A' = P(A)$ alors pour tout X dans le noyau de A, $A'X = P(0)X$. Il faut donc $P(0) = 0$. Si A est inversible et si $\chi_A(X) = XQ(X) + (-1)^n \det(A)$ alors d'après Cayley–Hamilton, $Q(A)A = (-1)^{n+1} \det(A) Id_n$, et tout polynôme en A s'écrit comme un polynôme en A sans terme constant :

$$(XR(X) + a)(A) = (R(A) + (-1)^{n+1} \frac{a}{\det(A)} Q(A))A.$$

   (b) Si A' est une réplique de A alors $A'_{r,s}$ est une réplique de $A_{r,s}$ donc un polynôme sans terme constant en $A_{r,s}$. Réciproquement si pour tout couple (r, s) il existe un polynôme $P_{r,s}$ tel que $A'_{r,s} = P_{r,s}(A_{r,s})A_{r,s}$, alors

$$\forall n \in \mathcal{N}_{r,s}, A_{r,s} \cdot n = 0 \Rightarrow A'_{r,s} \cdot n = 0.$$

   Donc A' est une réplique de A.

10. (a) On vérifie par n-linéarité du produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, que

$$\forall r, s \geqslant 0, (A + B)_{r,s} = A_{r,s} + B_{r,s}.$$

   D'après la décomposition de Dunford, $A = D + N$ avec $[D, N] = 0$, D semi-simple et N nilpotent. D'où

$$\forall r, s \geqslant 0, A_{r,s} = D_{r,s} + N_{r,s}, [D_{r,s}, N_{r,s}] = [D, N]_{r,s} = 0.$$

   D'après 7) $D_{r,s}$ est semi-simple et $N_{r,s}$ nilpotente. Comme ces deux matrices commutent, la décomposition de Dunford de $A_{r,s}$ est $A_{r,s} = D_{r,s} + N_{r,s}$.

   (b) Par stabilité du noyau de $A_{r,s}$ par $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$, les endomorphismes du noyau de $A_{r,s}$ induits par $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ donne la décomposition de Dunford de l'endomorphisme nul, donc $D_{r,s}$ et $N_{r,s}$ s'annulent sur le noyau de $A_{r,s}$. On en déduit que D et N sont des répliques de A.

11. Supposons que B soit une réplique de A. D'après la question 5, si A est diagonalisable, en utilisant la matrice P des coordonnées d'une base de vecteur propres de A, et les isomorphismes $\Phi_{P,r,s}$, on peut se ramener au cas d'une matrice diagonale $D = P^{-1}AP$. On peut donc directement supposer A diagonale de valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. La réplique B de A est alors diagonale de valeurs propres $(P(\lambda_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où P est un polynôme sans terme constant. D'après la question 7, les valeurs propres de $A_{r,s}$ sont de la forme

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_{i_p} - \sum_{q=1}^{s} \lambda_{j_q}.$$

   La matrice $B_{r,s}$ est alors diagonale de valeurs propres :

$$\sum_{p=1}^{r} P(\lambda_{i_p}) - \sum_{q=1}^{s} P(\lambda_{j_q}).$$

En particulier les noyaux $\ker A_{r,s}$ et $\ker B_{r,s}$ correspondent aux sous-espaces propres associés à la valeur propre 0. D'où $\ker A_{r,s} \subset \ker B_{r,s}$ se traduit par les implications

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_{i_p} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_{j_q} = 0 \to \sum_{p=1}^{r} P(\lambda_{i_p}) - \sum_{j=1}^{q} P(\lambda_{j_q}) = 0.$$

En utilisant le fait que ces implications sont vérifiées pour tout r, s positifs ou nuls, on en déduit

$$\forall (a_i) \in \mathbf{Z}^n, \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i P(\lambda_i) = 0.$$

Les applications $\mathbf{Q}$-linéaires $f : \mathbf{Q}^n \to \mathbf{Q}\langle \lambda_i \rangle$ et $g : \mathbf{Q}^n \to \mathbf{K}$ définies par $f(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i$ et $g(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i P(\lambda_i)$ vérifient $\ker f \subset \ker g$. Par le théorème de factorisation, il existe une application $\mathbf{Q}$ linéaire ϕ de $\mathbf{Q}\langle \lambda_i \rangle$ dans $\mathbf{K}$ telle que $g = \phi \circ f$. Cette application linéaire vérifie $\phi(\lambda_i) = P(\lambda_i)$. Réciproquement, si une telle application linéaire existe alors pour tout r, s positifs ou nuls, les valeurs propres nulles de $A_{r,s}$ donne par linéarité de ϕ, des valeurs propres nulles pour $B_{r,s}$ d'où $\ker A_{r,s} \subset \ker B_{r,s}$. La matrice B est donc une réplique de A.

12. (a) Si $n = 1$, alors $A = 0$ puis $B = 0$. Pour $n = 2$ une matrice nilpotente A vérifie $A^2 = 0$ donc les polynômes en A sans terme constant sont de la forme λA.

(b) On suppose le résultat établi au rang $n-1$. Soit A la matrice compagnon nilpotente cyclique d'ordre n, on a donc $A.e_i = e_{i+1}$ pour $i < n$ et $A.e_n = O_E$. Si B est une réplique de A, c'est un polynôme en A, et comme il commute avec A, l'image de A est stable par B. Soit A' la matrice induite par A sur $E' = \langle e_2, \cdots, e_n \rangle$. C'est la matrice compagnon de l'endomorphisme cyclique induit $e_i \to e_{i+1}$ pour $2 \leqslant i < n$ $e_n \to O'_E$. Par stabilité de E' par A et B, $A'_{r,s}$ et $B'_{r,s}$ sont induit par $A_{r,s}$ et $B_{r,s}$ sur les tenseurs de support dans E' et E'^* qui s'identifient à

$$\mathcal{N}'_{r,s} = \langle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_s},\ i_1 > 1, \ldots i_r > 1, j_1 > 1, \ldots, j_s > 1. \rangle$$

En particulier si $\ker A_{r,s} \subset \ker B_{r,s}$ alors $\ker A'_{r,s}$ s'identifie à $\ker A_{r,s} \cap \mathcal{N}'_{r,s}$, on a alors l'inclusion $\ker A'_{r,s} \subset \ker B'_{r,s}$. La matrice B' est donc une réplique de A'. D'où l'existence de λ tel que $B' = \lambda A'$. Si $C = B - \lambda A$, il reste à calculer l'image de e_1. On a

$$C \cdot e_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Par construction $CA = 0$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_{i+1} = O_E$$

On obtient donc $a_i = 0$ pour $i \leqslant n$ d'où le résultat annoncé.

(c) On regarde l'action sur $\mathcal{N}_{2,0}$ en utilisant la base $f_{i,j} = e_i \otimes e_j$. On a

$$\begin{gathered} i \neq n, , j \neq n, A_{2,0}(e_i \otimes e_j) = e_{i+1} \otimes e_j + e_i \otimes e_{j+1} \\ A_{2,0}(e_n \otimes e_n) = 0 \\ j < n,\ A_{2,0}(e_n \otimes e_j) = e_n \otimes e_{j+1} \\ i < n,\ A_{2,0}(e_i \otimes e_n) = e_{j+1} \otimes e_n \end{gathered}$$

La matrice $A_{2,0}$ est triangulaire inférieure par blocs de taille n.

$$A_{2,0} = \begin{pmatrix} A & & & \\ I & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & A \end{pmatrix},$$

où seuls les blocs non nuls sont indiqués.
Si P est un polynôme $P(A_{2,0})$ est donc triangulaire inférieure par blocs de taille n, les blocs sur la diagonale étant $P(A)$ et ceux en dessous de la forme $P'(A)$. (Immédiat par récurrence sur les puissances de la matrice ou par la formule $P(X+Y) = P(X)+YP'(X)+Y^2Q(X,Y)$ en substituant X par la matrice diagonale par bloc $diag_n(A)$ et Y par $A_{2,0} - diag_n(A)$).

Supposons C non nulle, c'est une réplique de A, et on peut supposer $\mu = 1$, c'est à dire $C = A^{n-1}$. Alors

$$C_{2,0} = \begin{pmatrix} A^{n-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ I & & & A^{n-1} \end{pmatrix},$$

où seuls les blocs non nuls apparaissent. On en déduit puisque $n > 2$, que les blocs en dessous de la diagonale sont nuls. Si $C_{2,0} = Q(A_{2,0})$ alors $Q'(A) = 0$ donc X^n divise Q, d'où $Q(A) = 0$, ce qui contredit $Q(A) = A^{n-1}$. Donc $C = 0$ et $B = \lambda A$.

13. On suppose maintenant A nilpotente quelconque. On peut décomposer l'espace en somme directe d'espaces cycliques. On se ramène, après un changement de base, au cas d'une matrice diagonale par blocs formée de matrices compagnons d'endomorphismes cycliques nilpotents.
Soit d le degré du polynôme minimal de A, on a donc $A^d = 0$. Si $e_{n-d}, \cdots, e_d$ est une base d'un espace cyclique de dimension d, le raisonnement fait précédemment montre que si B est une réplique de A, la matrice B' induite par B sur $\langle e_{n-d}, \cdots, e_n\rangle$ est une réplique de la matrice A' induite par A. En particulier il existe λ tel que $B' = \lambda A'$ Comme B est une réplique de A, c'est un polynôme en A : $Q(A)$. Le polynôme $Q(A)$ ne dépend que de la classe de Q modulo X^d, et puisque $B' = Q(A')$ cette classe est λX. D'où $B = \lambda A$.

14. On considère la décomposition de Dunford $A = D + N$.

    (a) Soit $B = \Delta + M$ la décomposition de Dunford d'une réplique de A. Comme Δ et M sont des répliques de B, elles sont des répliques de A. Δ est donc une réplique de A, donc de la forme $P(A)$ où P est un polynôme sans terme constant. On en déduit $\Delta = P(D + N)$ puis si $P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X,Y)$, alors

    $$\Delta = P(D) + N(P'(D) + NQ(D,N)$$

    Cette écriture à lieux dans l'algèbre commutative $\mathbf{K}[D,N]$, $P(D)$ est semi-simple, car si D est diagonalisable dans une extension, $P(D)$ aussi. $N(P'(D) + NQ(D,N))$ est nilpotente et commute avec $P(D)$. On a donc obtenu la décomposition de Dunford de $P(\Delta)$. D'après l'unicité $\Delta = P(D)$ et $N(P'(D) + NQ(D,N) = 0$. Ce raisonnement se fait pour chaque couple (r,s) d'entiers positifs. Donc $\Delta_{r,s}$ est un polynôme en $D_{r,s}$ sans terme constant. Δ est donc une réplique de D.

    (b) De même M est un polynôme non constant en A. $M = P_1(D) + N(P_1'(D) + NQ_1(D,N))$ est la décomposition de Dunford de M. D'où $P_1(D) = 0$, et $M = N(P_1'(D) + NQ_1(D,N))$. Comme N et $P_1'(D) + NQ_1(D,N)$ commutent, le noyau de N est contenu dans celui de M. Ce raisonnement se fait pour tout couples (r,s) d'entiers positifs, donc M est une réplique de N.

    (c) Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A les répliques de A sont de la forme $P(D) + \lambda N$ où λ est un élément de $\mathbf{K}$ et P un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ tel que l'application qui a une valeur propre λ_i associe $P(\lambda_i)$ se prolonge en une application linéaire de $\mathbf{Q}\langle\lambda_i\rangle$ dans $\mathbf{K}(\lambda_i)$.

15. Soit A dans $M_n(\mathbf{K})$, si A est nilpotente, toute réplique de A est de la forme λA donc $Tr(AA') = \lambda Tr(A^2) = 0$. Réciproquement supposons $Tr(AB) = 0$ pour toute réplique B de A. Soit $A =$

$D+N$ la décomposition de DUNFORD de A, si B est une réplique de A, B commute avec N, donc BN est nilpotent. D'où $Tr(BN) = 0$ puis $Tr(DB) = 0$. Si Δ est une réplique de D, c'est une réplique de A, donc $Tr(D\Delta) = 0$. Considérons une forme $\mathbf{Q}$-linéaire ϕ sur le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}\langle\lambda_i\rangle$. Si π_A est scindé, le polynôme d'interpolation de LAGRANGE défini par $P(\lambda_i) = \phi(\lambda_i)$ est dans $\mathbf{K}[X]$, donc la matrice $\Delta = P(D)$ est une réplique de D et $Tr(DP(D)) = 0$. D'où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\phi(\lambda_i) = 0$. Comme les $\phi(\lambda_i)$ sont dans $\mathbf{Q}$, on peut calculer l'image par ϕ, ce qui donne $\sum_{i=1}^{n} \phi(\lambda_i)^2 = 0$. Les formes $\mathbf{Q}$-linéaires sont donc nulles, l'espace vectoriel est réduit à $\{0\}$, D est nulle donc A est nilpotente.

Si π_A n'est pas scindé, on considère une extension L/K dans laquelle π_A est scindé. Si $\mathcal{R}_L(A)$ est l'espace vectoriel des répliques de A dans $M_n(L)$, d'après 9.b)

$$\mathcal{R}_L(A) = \{A' \in M_n(L), \forall r \geqslant 0 \forall s \geqslant 0,\ A'_{r,s} \in \langle A^i_{r,s}, 1 \leqslant i \leqslant \deg \pi_{A_{r,s}} \rangle\}.$$

est défini par des équations à coefficients dans K, d'où $\dim_L \mathcal{R}_L(A) = \dim_K \mathcal{R}_K(A)$. L'espace $\mathcal{R}_L(A)$ admet une base formée d'éléments de $\mathcal{R}_K(A)$, et par L-linéarité de la trace, pour toute réplique A' de A dans $M_n(L)$, $Tr(AA') = 0$. On se ramène donc au cas précédent. La matrice A est nilpotente.

Chapitre 4

Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Le sujet est disponible à l'URL www.devenirenseignant.gouv.fr/cid111368/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2017.html ou sur le site agreg.org.

4.1 Rapport sur l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Présentation du sujet

Le sujet d'Analyse et Probabilités de la session 2017 portait sur l'étude de la formule de LIE-TROTTER-KATO concernant les exponentielles de matrices et plus généralement les semi-groupes d'opérateurs. Dans le cas des matrices, cette formule s'écrit

$$\left(\exp^{-tA/n}\exp^{-tB/n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp^{-t(A+B)} \tag{4.1}$$

pour $t > 0$ fixé et A et B deux matrices carrées. Il s'agissait en particulier de voir à quel point cette formule s'étend en dimension infinie en étudiant quelques exemples, ainsi que d'étudier la vitesse de convergence dans la formule.

La preuve concernant les matrices est proposée dans la partie **II**. L'esprit de la preuve est fondamentalement numérique puisque qu'il est dans de nombreux cas plus facile et intuitif de regarder les exponentielles de A et de B plutôt que celle de $A+B$, comme le rappelle par exemple H. F. TROTTER dans l'introduction de son article [5] étendant la formule à la dimension infinie en 1958, preuve affinée dans le cas Hilbertien par T. KATO [2]. Une bonne introduction au sujet ainsi que des développements récents sont proposés dans la thèse de V. CACHIA [1].

Le sujet proposé aborde de manière graduelle les notions et résultats concernant cette formule.

Dans la partie **I**, on étudie d'abord les exponentielles de matrices carrées réelles de taille d dans l'espace de BANACH $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ muni de la norme induite par la norme 2 sur $\mathbf{R}^d$. Plusieurs approches sont proposées (par série convergente ou bien résolution d'une équation différentielle).

Dans la partie **II**, on prouve la formule de LIE-TROTTER-KATO pour les matrices, en suivant la preuve originale de LIE (1875). On obtient aussi dans ce cas une estimation de la vitesse de convergence en $1/n$. Dans la dernière question, toujours consacrée aux matrices, on montre une formule un peu plus élaborée, dite formule de STRANG, qui permet d'obtenir une vitesse de convergence en $1/n^2$, voir [3], formule très exploitée pour la conception de schémas numériques.

Dans la partie **III**, on étudie les semi-groupes d'opérateurs, dont on rappelle une définition, et dont un exemple est justement la fonction $t \longmapsto \exp^{-tA}$ dans le cas de la dimension finie et lorsque A est positive. Plusieurs exemples sont proposés dans L^2, dans ℓ^2 et on finit par un contre exemple à la formule de LIE-TROTTER KATO issu d'un article de H. F. TROTTER [6].

Dans la partie **IV** on travaille en dimension infinie avec un exemple explicite construit à l'aide de matrices 2×2 dans un espace de HILBERT *ad hoc*. Il s'agit de montrer que dans ce cas, la convergence dans la formule est moins bonne que $1/n$. Cet exemple est inspiré d'un article de H. TAMURA [4].

Remarques générales

Les parties **I** et **II** ont été abordées par la majorité des candidats. Une moitié d'entre eux environ a commencé la partie **III**, jusqu'aux questions **III**-3) ou **III**-4). Seuls quelques très bons candidats ont commencé l'analyse proposée dans la partie **IV**.

Le jury a pris en compte la qualité de la rédaction des copies. La précision des arguments est indispensable pour obtenir le maximum de points, mais il ne faut pas non plus négliger l'écriture et le soin dans la présentation. Certaines réponses illisibles n'ont parfois pas pu être prises en compte.

Il n'est pas nécéssaire de recopier la question de l'énoncé, ni la réponse sans aucune étape intermédiaire lorsqu'elle est donnée au candidat.

Sur un nombre conséquent de copies, des confusions rédhibitoires ont pu être constatées entre différents objets mathématiques rencontrés : égalités entre objets de natures différentes, inégalités entre matrices et nombres, quotients de vecteurs. Le jury recommande une relecture attentive de chaque question avant de passer à la suivante afin de ne pas laisser ces incohérences sur la copie.

Références bibliographiques

[1] V. CACCHIA, *La formule de* TROTTER-KATO *: approximation des semi-groupes en normes d'opérateur et de trace*, Thèse, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2001.

[2] T. KATO, TROTTER*'s product formula for arbitrary pair of self-adjoint contraction semigroups*, in *Topics in functional analysis (essays dedicated to* M. G. KREIN *on the occasion of his 70th birthday)*, Advances in Mathematics Supplementary Studies 3, M. KAC éd., Academic Press, 1978, p. 185-195.

[3] G. STRANG, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., 5, 506-517, 1968.

[4] H. TAMURA, *A remark on operator-norm convergence of* TROTTER-KATO *product formula*, Integral Equations and Operator Theory, 37 (3), 350–356, 2000.

[5] H. F. TROTTER, *Approximation of semi-groups of operators.*, Pacific J. Math., 8 (4), 887–919, 1958.

[6] H. F. TROTTER, *On the product of semi-groups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. 10, 545–551, 1959.

Commentaires détaillés

Partie I

1) Cette question a été particulièrement discriminante. La notion de borne supérieure est mal maîtrisée par un trop grand nombre de candidats. Pour montrer que l'application est bien définie, il faut montrer que le supremum de la quantité scalaire définie en (2) est fini. Ce point a été mal compris, bien que faisant partie d'un des fondamentaux de la topologie en dimension finie. Dans le même esprit, la définition précise d'une norme doit être connue.

2a) Les indications sur la diagonalisation des matrices symétriques données dans le préambule permettent d'obtenir le résultat presque immédiatement. Il n'est pas nécéssaire par ailleurs d'expliciter la diagonalisation pour obtenir le résultat. Cette question a pourtant été souvent mal rédigée.

2b) On rappelle qu'en toute généralité, la trace d'une matrice n'est pas la somme de ses valeurs propres (même comptées avec leur multiplicité). C'est vrai quand elle est diagonalisable, ce qu'il ne fallait pas oublier de mentionner.

3a) Il faut faire attention à ne pas diviser par zéro dans la preuve de cette propriété, où la notion de supremum est de nouveau à utiliser avec précision.

3b) Beaucoup de candidats croient qu'il suffit de majorer les sommes partielles (en norme) pour obtenir le résultat. Ce n'est pas suffisant : il faut bien majorer les sommes partielles de normes et ne pas oublier d'invoquer la propriété de complétude de $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$. De plus on ne peut écrire de somme infinie avant d'avoir montré que la somme converge. Cette question a souvent été mal rédigée.

3c) La convergence absolue des séries doit impérativement être mentionnée dans la preuve de la convergence de ce produit de CAUCHY. La commutation des deux matrices doit être rappelée au moment adéquat.

4a) Cette question calculatoire, très souvent traitée par les candidats, a donné lieu à beaucoup d'erreurs et de résultats incomplets. On rappelle en particulier que pour déterminer les valeurs propres d'une matrice, connaître un polynôme annulateur n'est pas suffisant.

4c) Certains candidats ont fait les calculs en oubliant les justifications.

5) Les équations différentielles constituent pour beaucoup de candidats un obstacle majeur. L'objectif de cette question était de redémontrer **I**-3-c) (sans l'utiliser donc) ce qui a été bien compris. La question a) a été correctement traitée même si la rédaction pêche souvent : il ne faut pas oublier de préciser les conditions d'application du théorème de CAUCHY–LIPSCHITZ. La question b), un peu plus subtile, a été relativement peu abordée ; elle nécéssite de manier les différentielles composées.

Partie II

1) Beaucoup de maladresses ont été observées sur ce calcul pourtant très guidé. Certains candidats majorent par exemple des quantités qui ne sont pas des réels.

2a) La propriété de commutation des matrices doit être rappelée au bon endroit dans l'argumentation. Cette question a globalement été bien traitée.

2b) Le résultat de cette question était donné dans l'énoncé et dans certaines copies des calculs faux ont été un peu arrangés pour arriver au bon résultat. Ces preuves approximatives ont été lourdement sanctionnées. L'inégalité triangulaire doit être utilisée correctement.

3) et 4) Ces questions ont été correctement traitées.

5) Cette question sur la formule dite « de STRANG » a très peu été abordée. La preuve devait suivre celle de la formule de LIE-TROTTER, mais n'était pas guidée comme au début de la partie **II**.

Partie III

1) Cette question reprenait dans le langage des semi-groupes les questions précédentes sur les matrices. La référence aux résultats correspondants n'a pas toujours été précise.

2) La continuité de $\mathcal{U}_s$, à s fixé, en tant qu'application linéaire a souvent été oubliée dans l'argumentation.

3a) Pour la propriété de continuité iii), il s'agissait de montrer une limite dans la norme de $\mathcal{H}$. Cela nécessitait une interversion limite/somme et par exemple l'utilisation de la convergence normale de la somme, ce qui a souvent été oublié.

3b) Cette question a été traitée, en tant que question isolée, par beaucoup de candidats. La preuve de la bornitude a néanmoins très souvent été mal faite ou éludée : un simple tableau de variation correctement rempli était suffisant pour avoir le maximum de points. L'utilisation des équivalents et des développements limités est mal maîtrisée : on rappelle par exemple qu'on ne peut pas sommer deux équivalents.

3c) Cette question a été peu abordée.

4) Le changement de variable précis était attendu pour a). La continuité de l'application linéaire a été très peu mentionnée. Les questions b) à d) ont été peu abordées.

4d) Afin de montrer le résultat, il faut calculer la limite du taux d'accroissement en norme L^2. Cela nécessitait, par exemple, une utilisation des théorèmes de convergence dominée et des accroissements finis.

5) et 6) Ces questions ont très peu été abordées. Quelques erreurs sur la composition ont été observées en 5c) (dérivation) et 6a) (composition des deux applications). A noter que seule la convergence presque partout était attendue en 5c).

Partie IV

Cette partie a été très peu traitée par les candidats. Pour la question 2a) une argumentation minimale reprenant la question **III**-3-a) était suffisante pour obtenir le maximum de points. On pourra noter deux coquilles dans les formules donnant la trace en 7c) et 8e), où il fallait lire $\mathcal{O}((n\varepsilon_n)^2)$. L'utilisation et l'adaptation presque directe des calculs sur les matrices menés dans la partie **I** était attendue.

4.2 Corrigé de l'épreuve écrite d'analyse et probabilités

Partie I : Exponentielles de matrices

1) Posons $A = (a_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}^d}$ alors pour $x \neq 0$, on a

$$\|Ax\|_2^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbf{N}^d} (Ax)_k^2 \leqslant \sup_{i,j} |a_{i,j}|^2 d \sum_{l\in\mathbf{N}^d} x_l^2$$

donc $\|\!|A|\!\|_2$ est bien définie. On vérifie que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $\|\!|\lambda A|\!\|_2 = |\lambda|\,\|\!|A|\!\|_2$. Par ailleurs pour A et $B \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$, $\|\!|A+B|\!\|_2 \leqslant \|\!|A|\!\|_2 + \|\!|B|\!\|_2$ par application directe de l'inégalité triangulaire pour $\|.\|_2$. Enfin soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ telle que $\|\!|A|\!\|_2 = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}^d$ (y compris 0), $\|Ax\|_2 = 0$ donc $Ax = 0$ d'ou $A = 0$.

2) a) Soit A une matrice symétrique. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_j)$ telles que $A = P\Lambda P^{-1}$. On vérifie que d'une part $\|\!|A|\!\|_2 = \|\!|\Lambda|\!\|_2$ et d'autre part $\|\!|\Lambda|\!\|_2 = \sup_{k\in\mathbf{N}^d} |\lambda_k|$.

b) On a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P\Lambda P^{-1}) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}\Lambda) = \mathrm{Tr}(\Lambda)$. Enfin

$$|\mathrm{Tr}(A)| = |\mathrm{Tr}(\Lambda)| = \left|\sum_k \lambda_k\right| \leqslant \sum_k |\lambda_k| \leqslant d \sup_k |\lambda_k| = d\,\|\!|A|\!\|_2\,.$$

3) a) Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on écrit que $\|ABx\|_2 \leqslant \|\!|A|\!\|_2 \|Bx\|_2 \leqslant \|\!|A|\!\|_2 \|\!|B|\!\|_2 \|x\|_2$ d'où le résultat.

b) D'après le résultat précédent, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|\!|A^k|\!\|_2 \leqslant \|\!|A|\!\|_2^k$, donc la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente dans $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ complet donc convergente.

c) On doit montrer que $\exp^A \exp^B = \exp^{A+B}$. Or le produit des deux exponentielles est un produit de type CAUCHY : en utilisant que les matrices commutent, on écrit pour tout $N \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}&\left\| \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{l=0}^{N} \frac{1}{l!}B^l\right) - \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k}\right\|_2 \\ &\leqslant \left\|\exp^A\right\|_2 \left(\sum_{l=N}^{2N} \frac{1}{l!}\left\|A\right\|_2^l\right) + \left\|\exp^B\right\|_2 \left(\sum_{l=N}^{2N} \frac{1}{k!}\left\|B\right\|_2^k\right).\end{aligned}$$

Or pour $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}A^kB^{n-k} = \frac{1}{n!}(A+B)^n$ par la formule du binôme de NEWTON, et par ailleurs les séries exponentielles convergent absolument, donc

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{l=N}^{2N} \frac{1}{k!}\left\|A\right\|_2^k = 0.$$

Donc

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \left\| \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right)\left(\sum_{l=0}^{N} \frac{s^l}{l!}B^l\right) - \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!}(A+B)^n\right\|_2 = 0$$

d'où le résultat.

4) a) On a directement $\exp^I = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$ et $\exp^J = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$ en utilisant $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} = e$ et $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$. Le calcul des valeurs propres et vecteurs propres de K donne

$$K = PJP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $\exp^K = P \exp^J P^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$. Pour L une analyse identique donne

$$L = Q\begin{pmatrix} r_+ & 0 \\ 0 & r_- \end{pmatrix}Q^{-1} \quad \text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_+ & r_- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -r_- & 1 \\ r_+ & -1 \end{pmatrix},$$

où $r_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. On obtient ainsi

$$\exp^L = Q\begin{pmatrix} e^{r_+} & 0 \\ 0 & e^{r_-} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

b) On a $M^2 = (\cos(\theta)J + \sin(\theta)K)^2 = \cos^2(\theta)J^2 + \sin^2(\theta)K^2 + \cos(\theta)\sin(\theta)(JK + KJ)$. Un calcul immédiat montre que $J^2 = K^2 = I$ et que $JK + KJ = 0$, donc $M^2 = \cos^2(\theta)I + \sin^2(\theta)I = I$.

c) La résolution est possible en diagonalisant de nouveau M mais la question précédente suggère d'utiliser directement la formule définissant l'exponentielle. On a en effet, en utilisant que la série est absolument convergente donc sommable par paquets

$$\begin{aligned}\exp^{-sM} &= \sum_k \frac{s^k(-1)^kM^k}{k!} = \sum_k \frac{s^{2k}M^{2k}}{(2k)!} - \sum_k \frac{s^{2k+1}M^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left(\sum_k \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right)I - \left(\sum_k \frac{s^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)M = \cosh(s)I - \sinh(s)M\end{aligned}$$

par définition de cosh et sinh en terme de séries. On a utilisé que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $M^{2k} = I$ et $M^{2k+1} = M$ qui se montre par récurrence en utilisant la question précédente. On en déduit directement que $\mathrm{Tr}(\exp^{-sM}) = 2\cosh(s)$ puisque $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

5) a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\phi_x(t) = \sum_k \frac{t^k}{k!}(-A)^k x$ et cette série converge dans $\mathbf{R}^d$ normalement sur tout intervalle compact en la variable t, ainsi que sa série des dérivées terme à terme donnée par

$$\psi_x(t) = \sum_{k \geqslant 1} k \frac{(t)^{k-1}}{k!}(-A)^k x = -A\phi_x(t).$$

Les termes généraux de la série et de la série dérivée sont continus, donc ϕ_x est dérivable, de dérivée continue, et $\phi_x'(t) = \psi_x(t) = -A\phi_x(t)$. Par ailleurs $\phi_x(0) = x$, et le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (ici à coefficient constants) implique que la solution de l'équation différentielle est unique.

b) Il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on a $\|\phi_x(t)\|_2 \leqslant \|x\|_2$. Posons $\alpha(t) = \|\phi_x(t)\|_2^2$. Cette fonction est dérivable, comme composée de la fonction dérivable $\phi_x : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^d$ et de la fonction différentiable $\|.\|_2^2 : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est un polynôme en les coordonnées. On obtient

$$\alpha'(t) = 2\phi_x'(t) \cdot \phi_x(t) = -2(A\phi_x(t)) \cdot \phi_x(t) \leqslant 0$$

car A est positive. La fonction α est donc décroissante continue et vaut $\|x\|_2^2$ en $t = 0$. Donc $\|\phi_x(t)\|_2^2 \leqslant \|x\|_2^2$ ce qui est le résultat cherché. La réciproque se montre par le même calcul mais en $t = 0$.

c) Le résultat est une conséquence de l'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz (linéaire), en regardant la solution entre 0 et s puis celle entre s et t (donnée initiale en s) et en l'identifiant avec la solution entre 0 et t.

Partie II : Formules de Lie-Trotter-Kato

1) Pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0,1]$, on écrit

$$\|S_{n,t}\|_2 = \left\| \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{-t(A+B)}{n} \right)^k \right\|_2 \leqslant \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{\|A+B\|_2}{n} \right)^k = e^{\|A+B\|_2/n}$$

ce qui implique par inégalité triangulaire que

$$\|S_{n,t}\|_2 \leqslant e^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)/n}$$

uniformément en $t \in [0,1]$. De même en utilisant I 3 a),

$$\begin{aligned} \|T_{n,t}\|_2 &\leqslant \left\| \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{-tA}{n} \right)^k \right\|_2 \left\| \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{-tB}{n} \right)^k \right\|_2 \\ &\leqslant \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{\|A\|_2}{n} \right)^k \sum_k \frac{1}{k!} \left(\frac{\|B\|_2}{n} \right)^k \\ &= e^{\|A\|_2/n} e^{\|B\|_2/n} = e^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)/n} \end{aligned}$$

2) a) On remarque que

$$\begin{aligned} S_{n,t}^n - T_{n,t}^n = S_{n,t}^{n-1}(S_{n,t} - T_{n,t}) + S_{n,t}^{n-2}(S_{n,t} - T_{n,t})T_{n,t} + S_{n,t}^{n-3}(S_{n,t} - T_{n,t})T_{n,t}^2 \\ + \cdots + (S_{n,t} - T_{n,t})T_{n,t}^{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée.

b) En utilisant l'inégalité triangulaire et la propriété montrée en I 3 a), on a d'après la question précédente

$$\|S_{n,t}^n - T_{n,t}^n\|_2 \leqslant \sum_{m=0}^{n-1} \|S_{n,t}\|_2^m \|T_{n,t}\|_2^{n-1-m} \|S_{n,t} - T_{n,t}\|_2 .$$

En utilisant **II**-2a), on obtient donc

$$\left\| S_{n,t}^n - T_{n,t}^n \right\|_2 \leqslant \sum_{m=0}^{n-1} e^{(\|A\|_2+\|B\|_2)\frac{m}{n}} e^{(\|A\|_2+\|B\|_2)\frac{n-1-m}{n}} \left\| S_{n,t} - T_{n,t} \right\|_2 .$$

Puisque $m + (n-1-m) = n-1 \leqslant n$ on a

$$\left\| S_{n,t}^n - T_{n,t}^n \right\|_2 \leqslant \sum_{m=0}^{n-1} e^{(\|A\|_2+\|B\|_2)} \left\| S_{n,t} - T_{n,t} \right\|_2 = n\ e^{(\|A\|_2+\|B\|_2)} \left\| S_{n,t} - T_{n,t} \right\|_2 .$$

3) Le développement en série de l'exponentielle donne

$$S_{n,t} = I - t\frac{(A+B)}{n} + \sum_{k\geqslant 2} \frac{(-t)^k}{k!}\left(\frac{A+B}{n}\right)^k$$

donc

$$\begin{aligned} &\left\| S_{n,t} - \left(I - t\frac{(A+B)}{n} \right) \right\|_2 \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k!} \left\| \frac{A+B}{n} \right\|_2^k \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} \|(A+B)\|_2^k = \frac{1}{n^2} e^{\|A+B\|_2} \leqslant \frac{C'}{n^2}. \end{aligned}$$

De même on peut écrire

$$\begin{aligned} T_{n,t} &= \left(I - t\frac{A}{n} + \underbrace{\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-t)^k}{k!}\left(\frac{A}{n}\right)^k}_{\alpha_{n,t}} \right) \left(I - t\frac{B}{n} + \underbrace{\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-t)^k}{k!}\left(\frac{B}{n}\right)^k}_{\beta_{n,t}} \right) \\ &= I - t\frac{(A+B)}{n} + \frac{t^2}{n^2}AB + \exp^{-tA/n} \beta_{n,t} + \alpha_{n,t} \exp^{-tB/n} - \alpha_{n,t}\beta_{n,t}. \end{aligned}$$

Or comme en début de question $\|\alpha_n\|_2 \leqslant \frac{1}{n^2} e^{\|A\|_2}$ et $\|\beta_n\|_2 \leqslant \frac{1}{n^2} e^{\|B\|_2}$ ainsi que $\left\|\exp^{-tA/n}\right\|_2 \leqslant e^{\|A\|_2}$ et $\left\|\exp^{-tB/n}\right\| \leqslant e^{\|B\|_2}$. On en déduit donc qu'il existe une constante C' telle que pour tout $n \in N^*$ et $t \in [0,1]$,

$$\left\| T_{n,t} - \left(I - t\frac{(A+B)}{n} \right) \right\|_2 \leqslant \frac{C''}{n^2}.$$

L'inégalité triangulaire implique donc que

$$\left\| S_{n,t} - T_{n,t} \right\|_2 \leqslant \left\| S_{n,t} - \left(I - t\frac{(A+B)}{n} \right) \right\|_2 + \left\| T_{n,t} - \left(I - t\frac{(A+B)}{n} \right) \right\|_2 \leqslant \frac{C' + C''}{n^2}$$

et on pose $C = C' + C''$.

4) En utilisant les questions **II**-2b) et **II**-3) on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\left\| S_{n,t}^n - T_{n,t}^n \right\|_2 \leqslant \frac{Cd\ e^{(\|A\|_2+\|B\|_2)}}{n}$$

ce qui est le résultat annoncé avec $C_{AB} = Cd\ e^{(\|A\|_2+\|B\|_2)}$.

5) En utilisant le développement de l'exponentielle un cran plus loin on peut écrire comme précédemment

$$\begin{aligned} &\left\| S_{n,t} - \left(I - t\frac{(A+B)}{n} + \frac{t^2}{2n^2}(A^2 + AB + BA + B^2) \right) \right\|_2 \\ &\leqslant \frac{1}{n^3} \exp^{\|A+B\|_2} = \frac{C'''}{n^3}. \end{aligned}$$

De même

$$\left\|R_{n,t} - \left(I - t\frac{(A+B)}{n} + \frac{t^2}{2n^2}(A^2 + AB + BA + B^2)\right)\right\|_2 \leqslant \frac{C''''}{n^3}.$$

On a par ailleurs les majorations similaires à II 1) suivantes

$$\|S_{n,t}\|_2 \leqslant e^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)/n} \qquad \text{et} \qquad \|R_{n,t}\|_2 \leqslant e^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)/n},$$

ainsi que comme en **II**-2b)

$$\left\|S_{n,t}^n - R_{n,t}^n\right\|_2 \leqslant ne^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)} \|S_{n,t} - R_{n,t}\|_2 .$$

L'ensemble de ces résultats implique que

$$\left\|S_{n,t}^n - R_{n,t}^n\right\|_2 \leqslant \frac{(C''' + C'''')d\ e^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)}}{n^2},$$

ce qui est le résultat cherché avec $C'_{AB} = (C''' + C'''')d\ e^{(\|A\|_2 + \|B\|_2)}$.

Partie III : Semi-groupes d'opérateurs

1) a) On doit vérifier les hypothèses de semi-groupe.

i) Ce point est une conséquence directe des questions **I**-5c) ou **I**-3c).

ii) $U_0 = I$ par la définition de l'exponentielle d'une matrice

iii) Pour $x \in \mathbf{R}^d$, la fonction définie en **I**-5a) par $\phi_x(t) = \exp^{-tA} x$ est continue (et même dérivable).

Pour montrer que le semi-groupe U est borné, il suffit d'invoquer le résultat **I**-5b).

b) On rappelle que la fonction définie en **I**-5a) par $\phi_x(t) = \exp^{-tA} x = U_t x$ pour $t \geqslant 0$ est dérivable, de dérivée $\phi'_x(t) = -A\phi_x(t)$. En partiulier elle est dérivable à droite en 0 et

$$\lim_{t \overset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{U_t x - x}{t} = \phi'_x(0) = -A\phi_x(0) = -Ax.$$

2) a) Soit $x \in D(\mathcal{A})$ et $s \in \mathbf{R}^+$. Alors pour tout $t > 0$,

$$\frac{\mathcal{U}_t\mathcal{U}_s x - \mathcal{U}_s x}{t} = \frac{\mathcal{U}_{t+s} x - \mathcal{U}_s x}{t} = \frac{\mathcal{U}_s\mathcal{U}_t x - \mathcal{U}_s x}{t} = \mathcal{U}_s \frac{\mathcal{U}_t x - x}{t} \xrightarrow[t \longrightarrow 0]{} -\mathcal{U}_s\mathcal{A}x$$

par continuité de l'opérateur $\mathcal{U}_s$. On en déduit que $\mathcal{U}_s x \in D(\mathcal{A})$.

b) D'après la question précédente, $\mathcal{U}_s x \in D(\mathcal{A})$ donc

$$-\mathcal{A}\mathcal{U}_s x = \lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \frac{\mathcal{U}_t\mathcal{U}_s x - \mathcal{U}_s x}{t} = -\mathcal{U}_s\mathcal{A}x$$

d'où le résultat.

3) a) On vérifie que $\mathcal{U}_0 = Id_{\mathcal{H}}$ et de manière immédiate que

$$\mathcal{U}_t \circ \mathcal{U}_s u = \left(e^{-(t+s)n^2} u_n\right)_{n \in \mathbf{N}} = \mathcal{U}_s \circ \mathcal{U}_t u.$$

Pour montrer la continuité, on doit verifier que pour $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{H}$ et t_0 fixés, on a

$$\|\mathcal{U}_t u - \mathcal{U}_{t_0} u\|_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbf{N}} (e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 u_n^2 \xrightarrow[\substack{t \to t_0 \\ t \geqslant 0}]{} 0.$$

Soit donc pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbf{N}}(e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 u_n^2$. Cette série de fonction converge normalement puisque $(e^{-tn^2} - e^{-t_0 n^2})^2 u_n^2 \leqslant u_n^2$ et elle est à termes continus. Donc la somme est également continue et en particulier $\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0) = 0$. $\mathcal{U}$ est donc un semi-groupe.

b) Direct.

c) Pour $u \in \mathcal{H}$, on constate que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{\substack{t\longrightarrow 0\\ t>0}} \frac{(\mathcal{U}_t u)_n - u_n}{t} = -n^2 u_n.$$

Donc si la limite $\lim_{\substack{t\longrightarrow 0\\ t>0}} \frac{\mathcal{U}_t u - u}{t}$ existe dans $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{A}u$ est défini pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $(\mathcal{A}u)_n = n^2 u_n$. On obtient alors que $D(\mathcal{A}) \subset F \overset{\text{def}}{=} \{u_n \in \mathcal{H} \mid \sum n^4 u_n^2 < \infty\}$. Réciproquement soit $u \in F$, posons $v = (n^2 u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et regardons pour tout $t > 0$,

$$f(t) = \left\|\frac{\mathcal{U}_t u - u}{t} + v\right\|_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{e^{-tn^2} - 1}{t} + n^2\right)^2 u_n^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \theta(tn^2) n^4 u_n^2.$$

On prolonge la fonction f sur $\mathbf{R}^+$ par $f(0) = 0$. On a $\theta(tn^2)$ uniformement borné en $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbf{N}$, donc la série de fonctions définie par f est normalement convergente, avec termes continus sur $\mathbf{R}^+$, donc continue, en particulier en 0. On obtient donc que $\lim_{\substack{t\longrightarrow 0\\ t>0}} \left\|\frac{\mathcal{U}_t u - u}{t} + v\right\|_{\mathcal{H}} = 0$. En conclusion $D(\mathcal{A}) = F$ et $\mathcal{A}u$ est défini pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $(\mathcal{A}u)_n = n^2 u_n$.

4) a) Le résultat est direct en utilisant le changement de variable $x \longmapsto x + t$ de Jacobien égal à 1.

b) Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que le support K de la fonction ϕ vérifie $K \subset [a, b]$ et soit $t_0 \in \mathbf{R}^+$. On constate par le théorème de convergence dominée de LEBESGUE que pour $K_0 = [t_0 - 1, t_0 + 1] \cap \mathbf{R}^+$

$$\lim_{\substack{t \longrightarrow t_0\\ t\in K_0}} \int |\mathcal{U}_t\phi(x) - \mathcal{U}_{t_0}\phi(x)|^2\, \mathrm{d}x = 0,$$

puisque la fonction intégrée est majorée uniformément en $t \in K_0$ par la fonction égale à $4\max|\phi|^2$ sur $[a - t_0 - 1, b + t_0 + 1]$. La fonction de l'énoncé est donc bien continue.

c) On vérifie que $\mathcal{U}_0 = Id_{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{U}_t \circ \mathcal{U}_s f(x) = f(x + t + s) = \mathcal{U}_s \circ \mathcal{U}_t f(x)$ pour presque tous $x \in \mathbf{R}$ et tous $s, t \in \mathbf{R}^+$. Le dernier point iii) est plus délicat et on suit l'indication de l'énoncé. Soit donc $f \in L^2$ et $\varepsilon > 0$. Soit ϕ une fonction continue nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$ telle que $\|f - \phi\| \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \cap \mathbf{R}^+$ on ait

$$\|\mathcal{U}_t\phi - \mathcal{U}_{t_0}\phi\|_{\mathcal{H}} \leqslant \varepsilon.$$

On a ainsi obtenu pour tout $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \cap \mathbf{R}^+$,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U}_t f - \mathcal{U}_{t_0} f\|_{\mathcal{H}} &\leqslant \|\mathcal{U}_t f - \mathcal{U}_t\phi\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{U}_t\phi - \mathcal{U}_{t_0}\phi\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{U}_{t_0}\phi - \mathcal{U}_{t_0} f\|_{\mathcal{H}}\\ &\leqslant \|f - \phi\|_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{U}_t\phi - \mathcal{U}_{t_0}\phi\|_{\mathcal{H}} + \|\phi - f\|_{\mathcal{H}}\\ &\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \mathcal{U}_t f$ est donc bien continue sur $\mathbf{R}^+$.

d) On étudie la limite de

$$\theta(t) = \int \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

Le théorème des accroissements finis implique que pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, il existe $x_t \in [x, x+t]$ tel que $\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = f'(x_t)$. Donc $\theta(t) = \int |f'(x_t) - f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x$. En utilisant comme en **III**-4b) le théorème de convergence dominée de LEBESGUE pour la fonction f' continue à support compact et le fait que $x_t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} x$, on obtient que $\lim\limits_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \theta(t) = 0$, ce qui assure que $f \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}f = -f'$. (Remarquons qu'au lieu du théorème des accroissements finis, on aurait pu utiliser une formulation intégrale de $f(x+t) - f(x)$ en début de question).

5) a) Considérons pour $t \geqslant 0$ fixé le changement de variable $\theta_t(x) = \psi(\psi^{-1}(x) - t)$. On remarque que $\theta_t(x) = x - t$ pour $x \leqslant 0$, $\theta_t(x) = \frac{x}{2} - t$ lorsque $x \in [0, 2t]$ et $\theta_t(x) = x - 2t$ lorsque $x \geqslant 2t$. On constate alors que

$$\begin{aligned}\int (\mathcal{V}_t f(x))^2 \, \mathrm{d}x &= \int_{]-\infty,0]} |f(x-t)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{[0,2t]} \left|f(\frac{x}{2} - t)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{[2t,\infty[} |f(x-2t)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{]-\infty,-t]} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}y + 2\int_{[-t,0]} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}y + \int_{[0,\infty[} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Comme $f \in L^2(\mathbf{R})$ on obtient que $\mathcal{V}_t f \in L^2(\mathbf{R})$.

b) La preuve suit exactement le même schéma que celle de l'exemple précédent. Soit donc $f \in L^2(\mathbf{R})$. On a d'abord $\mathcal{V}_0 f = f$. Soient $s, t \geqslant 0$, on a alors pour presque tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathcal{V}_t \circ \mathcal{V}_s f(x) = f(\psi(\psi^{-1}(\psi(\psi^{-1}(x) - t)) - s)) = f(\psi((\psi^{-1}(x) - t) - s)) = \mathcal{V}_{t+s} f(x).$$

Pour le dernier point iii), on remarque que comme en **III**-4b), on a pour t_0 fixé et ϕ continue à support compact $\lim_{t \longrightarrow t_0} \mathcal{V}_t \phi = \mathcal{V}_{t_0} \phi$ dans $L^2(\mathbf{R})$ par le théorème de convergence dominée de LEBESGUE. Puis pour $f \in L^2(\mathbf{R})$ on approche f par une telle fonction ϕ dans $L^2(\mathbf{R})$. On remarque ensuite que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\|\mathcal{V}_t f - \mathcal{V}_t \phi\| \leqslant 3 \|f - \phi\|$$

ce qui donne finalement exactement comme en **III**-4b) que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \cap \mathbf{R}^+$,

$$\|\mathcal{V}_t f - \mathcal{V}_{t_0} f\|_{\mathcal{H}} \leqslant 3\varepsilon.$$

La fonction $t \longmapsto \mathcal{V}_t f$ est donc bien continue sur $\mathbf{R}^+$.

c) Pour x fixé, il s'agit simplement d'exprimer la dérivée en $t = 0$ de la fonction $\alpha_x : t \longmapsto \mathcal{V}_t f(x) = f(\psi(\psi^{-1}(x) - t))$. Cette fonction est presque partout dérivable. Or pour tout $t \geqslant 0$, lorsque c'est bien défini, on a

$$\alpha_x'(t) = -\psi'(\psi^{-1}(x) - t) f'(\psi(\psi^{-1}(x) - t))$$

et donc

$$\lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = -\psi'(\psi^{-1}(x)) f'(\psi \circ \psi^{-1}(x)).$$

Or pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\psi \circ \psi^{-1}(x) = x$, $\psi'(\psi^{-1}(x)) = 2 = \psi'(x)$ si $x > 0$ et $\psi'(\psi^{-1}(x)) = 1 = \psi'(x)$ si $x \leqslant 0$. On obtient donc

$$\lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \frac{\mathcal{V}_t f(x) - f(x)}{t} = -\psi'(x) f'(x),$$

ce qui est le résultat cherché.

6) a) On remarque que pour $h \geqslant 0$ et $f \in L^p(\mathbf{R})$, on a pour presque tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathcal{U}_h \mathcal{V}_h f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(\frac{x-h}{2}) & \text{si } x \in [0, 2h] \\ f(x-h) & \text{si } x \geqslant 2h \end{cases}$$

En particulier $\mathcal{U}_h\mathcal{V}_hf_h(x) = \chi_{[-h,h]}$ par calcul direct. Le cas général s'en déduit par récurrence.

b) Un calcul direct montre que

$$\|f_h\| = \sqrt{h} \quad \text{et} \quad \|(U_hV_h)^nf_h\| = \sqrt{n+1}\sqrt{h}.$$

On en déduit le résultat.

c) Si la suite $(\mathcal{U}_{t/n}\mathcal{V}_{t/n})^n$ convergeait, alors elle serait bornée dans $\leqslant (L^2(\mathbf{R}), L^2(\mathbf{R}))$, or d'après la question précédente

$$\left\|(\mathcal{U}_{t/n}\mathcal{V}_{t/n})^n\right\| \geqslant \sqrt{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

donc la suite ne converge pas.

Partie IV : Borne inférieure dans la formule de Trotter-Kato

1) Soit $u \in D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{B}}$. Alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} \|A_nu_n\|_2^2 < \infty$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} \|B_nu_n\|_2^2$. Par linéarité et par l'inégalité triangulaire on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|(A_n + B_n)u_n\|_2^2 \leqslant 2\|A_nu_n\|_2^2 + 2\|B_nu_n\|_2^2$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \|(A_n + B_n)u_n\|_2^2$ converge et $u \in D_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$.

Pour la densité, on vérifie de manière immédiate que l'ensemble des suites presque nulles (c'est à dire à termes nuls à partir d'un certain rang) forment un ensemble dense de $\mathcal{H}$ et sont par ailleurs dans $D_{\mathcal{A}} \cap D_{\mathcal{B}}$.

2) a) Vérifions les trois points de la définition. Pour s, $t \in \mathbf{R}_+$ et $u \in \mathcal{H}$, on a bien $\mathcal{U}_t \circ \mathcal{U}_su = \mathcal{U}_t((\exp^{-sA_n} u_n)) = \left(\exp^{-(t+s)A_n} u_n = \mathcal{U}_{t+s}u\right)$, par la propriété fonctionnelle de l'exponentielle montrée en **III**-1a). La propriété $\mathcal{U}_0u = u$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ est immédiate. Enfin pour la troisième propriété on doit montrer que

$$\lim_{\substack{t\longrightarrow t_0\\ t\geqslant 0}} \sum \left\|\exp^{-tA_n} u_n - \exp^{-t_0A_n} u_n\right\|_2^2 = 0$$

pour $t_0 \geqslant 0$ fixé et $u \in \mathcal{H}$. La preuve se fait exactement comme en **III**-3 a) par convergence normale de la série autorisant l'interversion de limite. La famille $\mathcal{U}$ est donc un semi-groupe.

b) On suit le même schéma de preuve qu'en III 3 c) : Pour $u \in \mathcal{H}$, on constate que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{\substack{t\longrightarrow 0\\ t>0}} \frac{(\mathcal{U}_tu)_n - u_n}{t} = -A_nu_n.$$

Donc si la limite $\lim_{\substack{t\longrightarrow 0\\ t>0}} \frac{\mathcal{U}_tu-u}{t}$ existe dans $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{A}u$ est défini pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $(\mathcal{A}u)_n = A_nu_n$. On obtient alors que $D(\mathcal{A}) \subset F \overset{\text{def}}{=} \left\{u_n \in \mathcal{H} \mid \sum\|A_nu_n\|_2^2 < \infty\right\}$. Réciproquement soit $u \in F$, et on pose $v = (A_nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour étudier, pour tout $t > 0$,

$$f(t) = \left\|\frac{\mathcal{U}_tu - u}{t} + v\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \left\|\frac{\exp^{-tA_n} - I}{t}u_n + A_nu_n\right\|_2^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbf{N}} f_n(t).$$

On remarque que pour chaque $n \in \mathbf{N}$, la fonction f_n prolongée en 0 par $f_n(0) = 0$ est continue sur $[0, 1]$ grace à III 1b) par exemple. Posons alors $f(0) = 0$. Montrons alors que la série définissant f est normalement convergente sur $]0, 1]$. On écrit que pour tous $t \in]0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\exp^{-tA_n} - I}{t}u_n\right\|_2 &= \left\|\left(\int_0^1 \exp^{-tsA_n} \mathrm{d}s\right) A_nu_n\right\|_2 \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left\|\exp^{-tsA_n}\right\|_2 \mathrm{d}s\right) \|A_nu_n\|_2 \\ &\leqslant \|A_nu_n\|_2\,,\end{aligned} \tag{4.2}$$

où on a utilisé I5b) et la positivité de tsA_n pour tout $s \in [0,1]$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que pour tout $t \in [0,1]$

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant 4 \|A_n u_n\|_2^2$$

et la série des f_n est donc normalement convergente puisque $(u_n) \in F$. On en déduit ainsi que f est continue et que $\lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t>0}} \left\| \frac{\mathcal{U}_t u - u}{t} + v \right\|_{\mathcal{H}} = 0$. En conclusion $D(\mathcal{A}) = F$ et $\mathcal{A}u$ est défini pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $(\mathcal{A}u)_n = A_n u_n$.

3) a) Soit $u = (u_n) = ((x_n, y_n)) \in D(\mathcal{A})$. On a

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle = \sum_n A_n u_n \cdot u_n = \lambda(I + n(J+I))u_n \cdot u_n = \lambda \|u\|_2^2 + 2\lambda \sum n x_n^2 \geqslant \|u\|_2^2$$

car $\lambda = (2/a^2)^{1/2\alpha} \geqslant 1$.

b) On a pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$B_n = n(\cos\theta_n J + \sin\theta_n K + I) = \begin{pmatrix} \cos\theta_n + 1 & \sin\theta_n \\ \sin\theta_n & -\cos\theta_n + 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique, son polynôme caractéristique est $X^2 - 2nX$. On obtient donc la décomposition voulue, et par ailleurs pour tout $u \in D(\mathcal{B})$,

$$\langle \mathcal{B}u, u\rangle = \sum_n B_n u_n \cdot u_n = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_n^{-1} u_n \cdot P_n^{-1} u_n \geqslant 0.$$

puisque $P_n^t = P_n^{-1}$. Le calcul exact de la matrice de passage donne par ailleurs

$$P_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \\ \sin(\theta_n/2) & \cos(\theta_n/2) \end{pmatrix} \qquad \text{et } P_n = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n/2) & \sin(\theta_n/2) \\ -\sin(\theta_n/2) & \cos(\theta_n/2) \end{pmatrix}.$$

4) a) On fait le calcul pour $n \in \mathbf{N}$ et $u = (u_n) = ((x_n, y_n)) \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \|B_n^\alpha u_n\|_2^2 &= B_n^{2\alpha} u_n \cdot u_n \\ &= D_n^{2\alpha} P_n^{-1} u_n \cdot P_n^{-1} u_n \\ &= (2n)^{2\alpha} (\cos(\theta_n/2) x_n + \sin(\theta_n/2) y_n)^2 \\ &\leqslant 2(2n)^{2\alpha} \cos^2(\theta_n/2) x_n^2 + 2(2n)^{2\alpha} \sin^2(\theta_n/2) y_n^2 \\ &\leqslant 2(2n)^{2\alpha} x_n^2 + (2n)^{2\alpha} \varepsilon_n y_n^2 \\ &= 2(2n)^{2\alpha} x_n^2 + 2y_n^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\varepsilon_n = 1 - \cos\theta_n = 2\sin^2(\theta_n/2)$ et que $(2n)^{2\alpha}\varepsilon_n = 2$. Par ailleurs $A_n^{2\alpha} = \lambda^{2\alpha} \begin{pmatrix} (1+2n)^{2\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \|A_n^\alpha u_n\|_2^2 = A_n^{2\alpha} u_n \cdot u_n &= \lambda^{2\alpha}(1+2n)^{2\alpha} x_n^2 + \lambda^{2\alpha} y_n^2 \\ &= 2a^{-2}(1+2n)^{2\alpha} x_n^2 + 2a^{-2} y_n^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|B_n^\alpha u_n\|_2^2 \leqslant 2(2n)^{2\alpha} x_n^2 + 2y_n^2 \leqslant 2(2n+1)^{2\alpha} x_n^2 + 2y_n^2 \leqslant a^2 \|A_n^\alpha u_n\|_2^2.$$

b) En particulier, on obtient que si $u \in D(\mathcal{A})$ alors $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|A_n^\alpha u_n\|_2^2 < \infty$ donc $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|B_n^\alpha u_n\|_2^2$ converge également, puis que que $\|\mathcal{B}^\alpha u\| \leqslant a \|\mathcal{A}^\alpha u\|$ et que $u \in D(\mathcal{B}^\alpha)$.

5) On écrit pour tout $n \in \mathbf{N}$ que

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= (\lambda + n\lambda)I + n\lambda J + n(I + \cos(\theta_n)J + \sin(\theta_n)K) \\ &= (\lambda + n\lambda + n)I + n(\lambda + \cos(\theta_n))J + n\sin(\theta_n)K. \end{aligned}$$

En remarquant que $n^2(\lambda + \cos(\theta_n))^2 + n^2\sin^2(\theta_n) = b_n^2$, que les deux nombres $\lambda + \cos(\theta_n)$ et $n\sin(\theta_n)$ sont strictement positifs ($\lambda > 1$), on obtient l'existence de $\phi_n \in]0, \pi/2[$ dans l'enoncé et l'écriture

$$A_n + B_n = a_n I + b_n\Big(\cos(\phi_n)J + \sin(\phi_n)K\Big) = a_n I + b_n M_n$$

avec $M_n = \cos(\phi_n)J + \sin(\phi_n)K$. Cette matrice M_n est symétrique et a pour valeurs propres 1 et -1 d'après I 4 b). $A_n + B_n$ a donc pour valeurs propres $a_n + b_n$ et $a_n - b_n$ et est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres car symétrique. Cela donne la seconde écriture avec la matrice orthogonale Q_n.

6) Posons

$$\mathcal{C}^{(n)} = \left(e^{-t\mathcal{A}/n}e^{-t\mathcal{B}/n}\right)^n - e^{-t(\mathcal{A}+\mathcal{B})} \stackrel{\text{def}}{=} \left(C_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbf{N}}.$$

Pour toute suite $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}$ telle que $u_k^{(n)} = 0$ dès que $k \neq n$ et $\left\|u_n^{(n)}\right\|_2 = 1$, on a alors $\|u^{(n)}\| = 1$ et

$$\left\|\mathcal{C}^{(n)}\right\| \geqslant \left\|\mathcal{C}^{(n)}u^{(n)}\right\| = \left\|C_n^{(n)}u_n^{(n)}\right\|_2.$$

En prenant le supremum sur les suites de type $u^{(n)}$ ce qui revient à prendre le supremum sur les vecteurs $u_n^{(n)}$ de norme 1, on obtient

$$\left\|\mathcal{C}^{(n)}\right\| \geqslant \left\|C_n^{(n)}\right\|_2.$$

On peut appliquer alors la question **I**-2b) pour la dimension $d = 2$, en remarquant que le résultat de cette question est vrai également dans le cas de matrices générales (et pas seulement symétriques) et on obtient que

$$\left\|\mathcal{C}^{(n)}\right\| \geqslant \frac{1}{2}\left|\mathrm{Tr}\left(C_n^{(n)}\right)\right| = \left|\mathrm{Tr}\left(\exp^{-tA_n/n}\exp^{-tB_n/n}\right)^n - \mathrm{Tr}\left(\exp^{-t(A_n+B_n)}\right)\right|,$$

puisque les matrices sont symétriques.

7) a) On a déjà remarqué que $A_n + B_n = a_n I + b_n M_n$ avec $M_n = \cos(\phi_n)J + \sin(\phi_n)K$. D'après la question **I**-4c) on peut alors écrire

$$\mathrm{Tr}\left(\exp^{-t(A_n+B_n)}\right) = \mathrm{Tr}\left(\exp^{-ta_nI}\exp^{-tb_nM_n}\right) = \exp^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left(\exp^{-tb_nM_n}\right) = 2e^{ta_n}\cosh(tb_n),$$

où on a aussi utilisé que les matrices I et M_n commutent, la linéarité de la trace et le fait que $\exp^{sI} = e^sI$ pour tout réel s. (Une seconde méthode consiste à utiliser la diagonalisation de $A_n + B_n$ obtenue en question 5, qui donne directement le résultat).

b) On écrit que

$$\begin{aligned} tb_n = tn\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\cos(\theta_n) + 1} &= tn\left((\lambda+1)^2 + 2\lambda(\cos(\theta_n) - 1)\right)^{1/2} \\ &= tn(\lambda+1)\left(1 - \frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}\varepsilon_n\right)^{1/2} \\ &= tn(\lambda+1) - \frac{t\lambda}{\lambda+1}n\varepsilon_n + \mathcal{O}(n\varepsilon_n^2) \end{aligned}$$

en rappelant que ε_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

c) On écrit que

$$\begin{aligned}\cosh(tb_n) &= \frac{1}{2}e^{tb_n}(1+e^{-2tb_n})\\ &= \frac{1}{2}e^{tn(\lambda+1)}e^{-\frac{t\lambda}{\lambda+1}n\varepsilon_n+\mathcal{O}(n\varepsilon_n^2)}(1+e^{-2tb_n})\\ &= \frac{1}{2}e^{tn(\lambda+1)}\left(1-\frac{t\lambda}{\lambda+1}n\varepsilon_n+\mathcal{O}((n\varepsilon_n)^2)\right)\end{aligned}$$

en rappelant que $n\varepsilon_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit le résultat puisque $-ta_n = -t(\lambda+n+n\lambda)$.

8) a) En utilisant le fait que pour trois matrices A, B, C on a $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$ on obtient d'abord

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\exp^{-tA_n/n}\exp^{-tB_n/n}\right)^n\right) = \mathrm{Tr}\left(\left(\exp^{-tA_n/2n}\exp^{-tB_n/n}\exp^{-tA_n/2n}\right)^n\right).$$

Posons $M_n = \cos(\theta_n)J + \sin(\theta_n)K$. On remarque que $-\frac{t}{2n}A_n = -t\frac{1}{2n}(\lambda+n)I - t\frac{\lambda}{2}J$ et $-tB_n/n = -tI - tM_n$ et donc

$$\mathrm{Tr}\left(\left(\exp^{-tA_n/2n}\exp^{-tB_n/n}\exp^{-tA_n/2n}\right)^n\right) = e^{-ta_n}\mathrm{Tr}\left(\left(\exp^{-tJ/2}\exp^{-tM_n}\exp^{-tJ/2}\right)^n\right).$$

On utilise ensuite les calculs de la question **I**-4 a) et **I**-4 c), qui donnent

$$\exp^{-tM_n} = \cosh(t)I - \sinh(t)M_n \qquad \exp^{-\frac{t}{2}J} = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0\\ 0 & e^{t/2}\end{pmatrix}.$$

La multiplication des matrices donne alors

$$\exp^{-tJ/2}\exp^{-tM_n}\exp^{-tJ/2} = c_nI - d_nJ - e_nK$$

ce qui implique le résultat avec les coefficients donnés dans l'énoncé.

b) Les formules trigonométriques classiques et hyperboliques donnent directement l'égalité $c_n^2 - d_n^2 - e_n^2 = 1$. On utilise ensuite de nouveau les formules trigonométriques hyperboliques et $\cos(\theta_n) = 1-\varepsilon_n$ et on obtient

$$\cosh(k_n) = \cosh(t(\lambda+1)) - \sinh(t\lambda)\sinh(t)\varepsilon_n.$$

Le développement limité de arccosh en $a = \cosh(t(\lambda+1)) > 1$ est donné par

$$\mathrm{arccosh}(a+x) = \mathrm{arccosh}(a)\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}x + \mathcal{O}(x^2)$$

ce qui donne pour $x = -\sinh(t\lambda)\sinh(t)\varepsilon_n$, avec $\mathrm{arccosh}(a) = t(\lambda+1)$ et $a^2-1 = \sinh^2(t(\lambda+1))$

$$k_n = t(\lambda+1) - \frac{\sinh(t\lambda)\sinh(t)}{\sinh(t(\lambda+1))}\varepsilon_n + \mathcal{O}(\varepsilon_n^2)$$

d'ou le résultat.

c) On remarque que

$$\exp^{-tJ/2}\exp^{-tM_n}\exp^{-tJ/2} = \cosh(k_n)I - \sinh(k_n)\left(\cos(\Theta_n)J + \sin(\Theta_n)K\right).$$

En utilisant la question **I**-4), on peut donc écrire que

$$\exp^{-tJ/2}\exp^{-tM_n}\exp^{-tJ/2} = \exp^{-k_n(\cos(\Theta_n)J+\sin(\Theta_n)K)}$$

d'où
$$\left(\exp^{-tJ/2}\exp^{-tM_n}\exp^{-tJ/2}\right)^n = \exp^{-nk_n(\cos(\Theta_n)J+\sin(\Theta_n)K)}$$
ce qui donne, en utilisant de nouveau la question **I**-4c),
$$\mathrm{Tr}\left(\left(\exp^{-tA_n/n}\exp^{-tB_n/n}\right)^n\right) = 2\exp^{-ta_n}\cosh(nk_n).$$

d) En réutilisant un développement de $\cosh(nk_n)$ et en remarquant que nk_n tend vers l'infini avec n, on obtient le résultat (on a de nouveau utilisé que $-ta_n = -t(\lambda + n + n\lambda)$).

9) Le résultat découle des trois dernières questions.

Chapitre 5

Épreuves orales : Algèbre et Géométrie ; Analyse et Probabilités ; Mathématiques–Option D ; Informatique fondamentale–Option D

5.1 Organisation générale des épreuves

Pour chacune des trois épreuves, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Afin d'aider les candidats et les préparateurs, la liste des leçons utilisées pour la session 2017 avait été publiée dans le précédent rapport et sur le site agreg.org. Cette innovation est reconduite pour 2018 : on trouvera en annexe les leçons du prochain concours. Quelques rares candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent un champ précis qu'il faut traiter. **Le hors sujet est lourdement sanctionné**.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou à leurs propres ouvrages (avec un numéro ISBN et non annotés [1]). Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires) ne sont pas autorisés ; les candidats n'ont pas accès à Internet (ni bien sûr à leur téléphone portable ou tout autre objet électronique [2] !). A l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats.

Ces documents sont manuscrits, ils comportent **au maximum 3 pages** au format A4 et possèdent une marge de 1 cm sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est recommandé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, *etc.* pour qu'il soit le plus lisible possible. En particulier il est vain de vouloir écrire petit dans l'espoir de placer plus de contenu ; on perd en clarté et le jury n'est pas disposé à utiliser une loupe. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures (et exclusivement à celles-ci). Sur ce document écrit, le candidat doit clairement faire apparaître les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

1. Les rapports de jury de l'agrégation externe de mathématiques, complets et reliés sont autorisés. Concernant les ouvrages numériques avec ISBN, seuls les ouvrages disponibles dans le commerce sont autorisés. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation.

2. Outre les téléphones, les calculatrices ne sont pas autorisées, ni les clés USB, ni les montres connectées, *etc*... sous peine d'exclusion du concours.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de **55 minutes environ** : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège.

5.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole, **6 minutes maximum**, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Si le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon, il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Il existe maintenant de nombreux plans *tout faits* disponibles dans la littérature, plus ou moins pertinents, de plus ou moins grande valeur. Il est naturel que les candidats s'inspirent de sources de qualité et, d'une certaine manière, le choix de ces sources, la capacité à s'en affranchir ou à pleinement se les approprier, participent au regard que le jury peut porter sur leur maturité scientifique. Il est bien entendu que l'objectif de cette partie de l'épreuve n'est pas de juger la capacité à simplement recopier un plan, ni à le réciter par cœur d'ailleurs. Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Exploiter des ouvrages de référence n'a rien de condamnable, mais le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet. On attend du candidat qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. En fait, pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? C'est l'occasion de s'interroger sur les difficultés didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. En quoi les exemples sélectionnés s'avèrent-ils pertinents ? Quelles figures illustrent particulièrement les notions en jeu ? Autrement dit, le jury attend une argumentation synthétique de la construction de la leçon.

Il s'agit d'une épreuve **orale**. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation choisie par le candidat et est par conséquent très important. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi, autant que possible dans le temps de préparation imparti, que la mise en forme : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est contre-productif de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Un exposé oral qui se réduit à relire simplement ce qui est écrit sur le document photocopié n'a pas beaucoup d'intérêt. Trop de candidats se contentent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur les articulations du plan, ni faire ressortir les méthodes ou les résultats importants. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation.

Le jury attache une grande importance à la **maîtrise du plan** qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

5.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Le niveau de l'agrégation ne peut toutefois se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac. Des choix de développement de ce niveau sont pénalisés.

Le jury demande au candidat de présenter **deux développements au moins**. Proposer des développements de niveaux trop disparates est perçu négativement par le jury. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat motivera soigneusement le choix des développements qu'il propose, expliquant en quoi il estime que ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De telles maladresses sont interprétées comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le candidat dispose de 15 mn (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide exposition des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. On ne saurait trop conseiller aux candidats d'illustrer leur développement (et éventuellement leur plan) par un ou plusieurs dessins : l'exposé y gagnerait en clarté pour le jury, le candidat pourrait ainsi montrer un souci louable de pédagogie.

Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Un certain nombre de développements fameux (l'ellipsoide de John, la décomposition de Dunford, le théorème de Bernstein, le processus de Galston-Watson,...) trouvent une place naturelle dans plusieurs leçons. Toutefois trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. L'évolution du programme pour la session 2018 devrait conduire à proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul, développements où les candidats peuvent judicieusement exploiter les connaissances spécifiques de leurs options pour illustrer leur leçon. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction.

Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

5.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut donc éviter que ce plan dépasse largement le niveau qu'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes » sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des exemples simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon, mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute ; **il doit rester attentif aux suggestions du jury**. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

5.2 L'épreuve orale d'algèbre et géométrie

Le jury apprécie que les candidats soient capables d'appliquer les résultats fondamentaux de leur leçon à des cas simples. Par exemple il est indispensable de savoir

— justifier qu'une matrice est diagonalisable ou en déterminer un polynôme annulateur ;

— effectuer des manipulations élémentaires sur les éléments appartenant à diverses structures algébriques standards ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathbf{F}_q$, etc.) ;

— mettre en œuvre des algorithmes exposés dans le plan (opérations élémentaires sur des systèmes ou des déterminants, réduction de Gauss d'une forme quadratique, *etc.*).

Dans les leçons, les illustrations des notions algébriques par des exemples et des applications issus de la géométrie sont les bienvenues. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtrent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.

Les notions de quotients sont importantes, il est important à ce stade de dominer la projection canonique et surtout, les subtilités du passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

La théorie des représentations, introduite récemment dans le programme du concours, est naturellement reliée à bon nombre de leçons. En effet, en dehors des leçons directement concernées, les représentations peuvent figurer naturellement dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106 et 150.

Les remarques qui suivent sont spécifiques à chaque leçon et permettent aux candidats de mieux saisir les attentes du jury sur chacun de ces sujets. On y distingue clairement ce qui constitue le cœur du sujet d'éléments plus sophistiqués et ambitieux, qui dépassent cette base.

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut bien dominer les deux approches de l'action de groupe : l'approche naturelle et l'approche *via* le morphisme du groupe agissant vers le groupe des permutations de l'ensemble sur lequel il agit. La formule des classes et ses applications immédiates sont incontournables. Des exemples de natures différentes doivent être présentés : actions sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel (en particulier les représentations), sur un ensemble de matrices, sur des groupes ou des anneaux. Les exemples issus de la géométrie ne manquent pas (groupes d'isométries d'un solide).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en décrivant les actions naturelles de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{F}_q)$ sur la droite projective qui donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$ et peuvent plus généralement en petit cardinal donner lieu à des isomorphismes de groupes. En notant que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations, ils pourront en déterminer le caractère.

Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects élémentaires. Elle doit donner l'occasion d'expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (exponentielle complexe et ses applications, polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations). Il ne faut pas non plus oublier la partie « groupe » de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent. De même, il est pertinent d'étudier les sous-groupes finis de $\mathbf{S}^1$ dans cette leçon.

On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbf{Q}[i]$, et les racines de l'unité qui y appartiennent ; tout comme aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$. Les transformées de Fourier discrètes et rapides peuvent aussi être abordées dans cete leçon.

Leçon 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, il faut non seulement évoquer les notions de groupe quotient, de sous-groupe dérivé et de groupe simple mais surtout savoir les utiliser et en expliquer l'intérêt. On pourra utiliser des exemples issus de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre linéaire (utilisation d'espaces vectoriels quotients par exemple). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme ; mais, lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions à l'aide d'une table de caractères et décrire le treillis des sous-groupes distingués, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé, d'un groupe fini à l'aide de cette table.

Leçon 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Dans cette leçon il faut savoir manipuler correctement les éléments de différentes structures usuelles ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.) comme, par exemple, en proposer un générateur ou une famille de générateurs, savoir calculer un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. Les groupes d'automorphismes fournissent des exemples très naturels. On peut aussi étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place ; il est utile de connaître les groupes diédraux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite mettre en avant les spécificités de groupes comme le groupe quaternionique, les sous-groupes finis de $SU(2)$ ou les groupes $GL_n(\mathbf{F}_q)$.

Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, *etc.*). On doit présenter des systèmes de générateurs, étudier la topologie et préciser pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.

Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes *a priori* non réelles. La présentation du lemme de Schur est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer dans la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de $\mathfrak{A}_5$ en utilisant l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe) ou évoquer la transformée de Fourier.

Leçon 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés qui peuvent être en relation avec les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes ; les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, fournissent aussi des exemples intéressants. La connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.

Tout comme dans la leçon 106, la présentation du pivot de Gauss et de ses applications est envisageable.

Leçon 110 : Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

Pour l'édition 2018 du concours, l'intitulé de cette leçon évolue en

Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

Les commentaires qui suivent prennent en compte cette évolution.

Le théorème de structure des groupes abéliens finis a une place de choix dans cette leçon, et la dualité des groupes abéliens finis doit être détaillée. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. D'ailleurs, des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est possible de s'intéresser aux sommes de Gauss.

Pour aller plus loin, la leçon peut naturellement déboucher sur l'introduction de la transformée de Fourier discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de Plancherel, mais dans une version affranchie des problèmes de convergence, qui font le sel des leçons d'Analyse sur ce sujet. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de Fourier rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de Hadamard.

Leçon 120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Dans cette leçon, l'entier n n'est pas forcément un nombre premier. Il serait bon de connaître les idéaux de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et, plus généralement, les morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Il est nécessaire de bien maîtriser le théorème chinois et sa réciproque. S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Il faut bien sûr savoir appliquer le théorème chinois à l'étude du groupe des inversibles et, ainsi, retrouver la multiplicativité de l'indicatrice d'Euler. Toujours dans le cadre du théorème chinois, il est bon de distinguer clairement les propriétés de groupes additifs et d'anneaux, de connaître les automorphismes, les nilpotents et les idempotents.

Enfin, il est indispensable de présenter quelques applications arithmétiques des propriétés des anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, telles que l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies. De même, les applications cryptographiques telles que l'algorithme RSA sont naturelles dans cette leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Leçon 121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Aussi les choix devront être clairement motivés. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers est un résultat historique important qu'il faudrait citer. Sa démonstration n'est bien sûr pas exigible au niveau de l'agrégation.

Quelques résultats sur les corps finis et leur géométrie sont les bienvenus, ainsi que des applications en cryptographie.

Leçon 122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon n'est pas uniquement théorique. Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ (décimaux, entiers de Gauss ou d'EISENSTEIN), accompagnés d'une description de leurs irréductibles. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées. Par exemple, les notions de polynôme minimal sont très naturelles parmi les applications. Les anneaux euclidiens représentent une classe d'anneaux principaux importante et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans certains anneaux peut être fait.

Leçon 123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues et les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées, par exemple l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer en théorie de GALOIS ou expliquer comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques.

Leçon 126 : Exemples d'équations diophantiennes.

Dans cette leçon on doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax+by=d$ (identité de BEZOUT, lemme de GAUSS), les systèmes de congruences, mais aussi bien entendu la méthode de descente de FERMAT et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p.

La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type MORDELL, PELL-FERMAT, et même FERMAT (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie GERMAIN).

Leçon 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il faut savoir qu'il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autres que $\mathbf{C}$; il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

Leçon 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

Cette leçon, qui ne sera pas reconduite en 2018, ne devait pas se concentrer exclusivement sur les aspects formels ou uniquement sur les polynômes symétriques. Les aspects arithmétiques ont parfois pu être négligés. Le jury attendait que les candidats puissent montrer l'irréductibilité d'un polynôme à plusieurs indéterminées en travaillant sur un anneau de type $A[X]$, où A est factoriel. Le théorème fondamental sur la structure de l'algèbre des polynômes symétriques est vrai sur $\mathbf{Z}$. L'algorithme pouvait être judicieusement présenté sur un exemple. Les applications aux quadriques, aux relations racines/cœfficients ne devaient pas être délaissées : on pouvait faire par exemple agir le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ sur les polynômes à n indéterminées de degré inférieur à 2. Les candidats pouvaient s'aventurer vers la géométrie algébrique et présenter le Nullstellensatz.

Pour la session 2018, cette leçon sera remplacée par

PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Les attendus pour ce nouvel intitulé sont les suivants.

Il est bien clair que le champ d'étude ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat devra prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

La leçon doit accorder une part substantielle à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Dans le cas des polynômes, on étudiera l'évolution de la suite des degrés et des restes. Il est important de savoir évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et on pourra faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

La leçon abordera des applications élémentaires : calcul de relations de BÉZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on pourra évoquer le rôle de algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classique en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, *etc*). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $SL_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On pourra établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. Aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On pourra rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

Leçon 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon on peut présenter des méthodes de résolution, de la théorie des corps, des notions de topologie (continuité des racines) ou même des formes quadratiques. Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé, de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS et des applications des racines (valeurs propres, *etc.*). Il est apprécié de faire apparaître le lien solide entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices ; l'étude des valeurs propres de la matrice compagnon d'un polynôme permet d'entretenir ce lien.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer en théorie de GALOIS ou s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN.

Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Dans cette leçon il faut présenter différentes actions (congruence, similitude, équivalence, ...) et dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants (rang, matrices échelonnées réduites...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de GAUSS, méritent aussi d'être présentés dans cette leçon. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est pertinent de faire apparaître à travers ces actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

Leçon 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est important de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses, on peut par exemple évoquer l'existence de polynômes annulateurs ou alors décomposer les isométries en produits de réflexions.

S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindre carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement explorer l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

Leçon 152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. Il est possible d'entamer la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1 et, dans ce cas, il est essentiel de savoir le montrer. Le plan doit être cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. On peut rappeler son rôle dans les formules de changement de variables, par exemple pour des transformations de variables aléatoires.

Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants, avec des illustrations sur des exemples, doivent être présentées. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application, ainsi que son caractère polynomial. Pour les utilisations des propriétés topologiques, on n'ommetra pas de préciser le corps de base sur lequel on se place.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et connaître sa dimension sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre.

Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques.

L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent).

Leçon 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

La décomposition de FROBENIUS trouve tout à fait sa place dans cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux. Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide.

Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs

$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra évoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius.

Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois constituer un développement consistant. La notion de signature doit être présentée ainsi que son unicité dans la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon.

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon.

L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de DUNFORD ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^T A$.

Leçon 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines, et savoir composer des isométries affines. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux applications aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.

Leçon 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de GAUSS constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte, et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité). Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt pratique (algorithmique) des méthodes présentées doit être expliqué y compris sur des exemples simples où l'on attend parfois une résolution explicite.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$. De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de HERMITE peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de CHOLESKI, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

Leçon 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Il faut tout d'abord noter que l'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope sont un aspect important de cette leçon. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de SILVESTER doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue, et les propriétés classiques des coniques doivent être données. On pourra présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de SCHUR-FROBENIUS qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Il est important de parler d'enveloppe convexe, de points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, ou les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY.

Leçon 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne doit pas rester au niveau de la classe de Terminale. L'étude des inversions est tout à fait appropriée, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de PTOLÉMÉE illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi étudier l'exponentielle complexe et les homographies de la sphère de RIEMANN. La réalisation du groupe SU_2 dans le corps des quaternions et ses applications peuvent trouver leur place dans la leçon. Il est possible de présenter les similitudes, les homographies et le birapport.

Leçon 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

C'est une leçon dans laquelle on s'attend à trouver des utilisations variées. On s'attend à ce que soient définis différents groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations) et à voir résolus des problèmes géométriques par des méthodes consistant à composer des transformations. De plus, les actions de groupes sur la géométrie permettent aussi de dégager des invariants essentiels (angle, birapport, excentricité d'une conique). Les groupes d'isométries d'une figure sont incontournables.

Leçon 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de NEWTON. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

5.3 L'épreuve orale d'analyse et probabilités

On trouvera dans cette section des commentaires sur chaque leçon de l'oral d'Analyse et Probabilités de la session 2017. La plupart des commentaires sur les leçons sont structurés en deux parties : la première présente ce que le jury considère comme le socle de la leçon ; la seconde partie propose des suggestions pour sortir de ce socle de base, éventuellement en allant au-delà des contours stricts du programme. Il ne s'agit que de suggestions. En particulier, s'aventurer sur des notions qui ne sont pas officiellement au programme du concours est un choix qui doit être réfléchi et qui réclame, bien entendu, de maîtriser ces notions. Le jury précise que ces excursions au delà du programme ne sont que des options ouvertes et qu'elles ne sont pas nécessaires pour briguer d'excellentes notes. Il vaut bien mieux présenter deux développements classiques, pertinents et maîtrisés tant au niveau du fond que de la présentation (notamment en respectant les 15 minutes allouées à cette partie de l'épreuve) plutôt que de s'aventurer sur des terrains où l'on risque de manquer d'adresse et de recul.

Avant d'aborder spécifiquement les leçons, il n'est pas inutile de rappeler quelques principes généraux. Ainsi, une liste, même riche, de théorèmes ne suffit pas à convaincre le jury. Il faut surtout savoir motiver ces énoncés et expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Il est souhaitable d'enrichir les leçons avec des exemples judicieusement choisis. Il est important de savoir s'auto-évaluer sur le niveau. Toutefois, indépendamment du choix du niveau, le candidat doit sélectionner des développements pertinents relativement au thème de la leçon. Ainsi, le jury peut avoir un jugement sévère lorsque l'intersection avec le titre du sujet est anecdotique. Ainsi quelques développements intéressants sont parfois abusivement exploités (citons par exemple « base hilbertienne de polynômes sur L^2 avec poids d'ordre exponentiel », « méthode de NEWTON », « GALTON-WATSON », « ellipsoïde de JOHN », « polynômes de BERNSTEIN »,...), ce qui peut conduire à un hors-sujet.

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple l'intervalle $[0, 1]$) offrent des exemples élémentaires et pertinents. Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces de fonctions continues et les bases de la convergence uniforme. Dans ce domaine, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Les espaces de HILBERT de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative.

Pour aller plus loin, d'autres espaces usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon. Le théorème de RIESZ-FISCHER est alors un très bon développement pour autant que ses difficultés soient maîtrisées. Les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ constituent aussi une ouverture de très bon niveau ou, dans une autre direction, l'espace de SOBOLEV H^1.

202 : Exemples de parties denses et applications.

Il ne faut pas négliger les exemples élémentaires comme les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ et leurs applications (par exemple la densité des $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbf{N}}$), ou encore les critères de densité dans un espace de HILBERT. Le théorème de WEIERSTRASS *via* les polynômes de BERNSTEIN peut être abordé à des niveaux divers (le choix du point de vue probabiliste exige d'en maîtriser tous les aspects) suivant que l'on précise ou pas la vitesse de convergence voire son optimalité. Des exemples matriciels trouvent leur place dans cette leçon comme l'étude de l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbf{C}$ (et même dans $\mathbf{R}$ pour les candidats voulant aller plus loin.)

Pour aller plus loin, la version plus abstraite du théorème de WEIERSTRASS (le théorème de STONE-WEIERSTRASS) est aussi intéressante et a de multiples applications. Cette leçon permet aussi d'explorer les questions d'approximation de fonctions par des polynômes et des polynômes trigonométriques, ou plus généralement la densité de certains espaces remarquables de fonctions dans les espaces de fonctions continues, ou dans les espaces L^p. Il est également possible de parler de l'équirépartition.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité en général (confusion entre *utilisation de la notion compacité* et *notion de compacité*), et de se concentrer en priorité sur le cadre métrique. Néanmoins, on attend des candidats d'avoir une vision synthétique de la compacité. Des exemples d'applications comme le théorème de HEINE et le théorème de ROLLE doivent y figurer et leur démonstration être connue. Par ailleurs, le candidat doit savoir quand la boule unité d'un espace vectoriel normé est compacte. Des exemples significatifs d'utilisation comme le théorème de STONE-WEIERSTRASS (version qui utilise pertinemment la compacité), des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout-à fait envisageables. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. On peut penser comme application à la diagonalisation des matrices symétriques à coefficients réels.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur l'espace de HILBERT relèvent également de cette leçon, et on pourra développer l'analyse de leurs propriétés spectrales.

204 : Connexité. Exemples et applications.

Le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global doit être mis en évidence dans cette leçon : en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables. On distinguera bien connexité et connexité par arcs (avec des exemples compris par le candidat), mais il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. *A contrario*, on pourra distinguer leur comportement par passage à l'adhérence. La notion de composantes connexes doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité sera un point apprécié par le jury.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) seront valorisés. Le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de RUNGE.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Les candidats devraient faire apparaître que l'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$ fournissent déjà de beaux exemples). On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ.

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de BAIRE sans application pertinente et maîtrisée ; elles sont nombreuses. Le jury met en garde sur le caractère délicat de la démonstration détaillée, souvent tentée, rarement réussie, de l'existence d'une partie dense de fonctions continues dérivables en aucun point.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Le prolongement par densité de certains résultats (comme la continuité de l'opérateur de translation [3] dans L^p) et le prolongement analytique relèvent bien sûr de cette leçon. Le prolongement éventuel de la somme d'une série entière sur le bord du disque est une notion qui doit être maîtrisée.

Pour aller plus loin, on peut par exemple parler de l'extension à L^2 de la transformation de FOURIER. Le théorème de HAHN-BANACH, dans le cas séparable, peut être un exemple de résultat très pertinent.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de RIESZ sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. *A contrario*, des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues.

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Cette leçon comporte un certain nombre de classiques comme par exemple les polynômes de BERNSTEIN, éventuellement agrémentés d'une estimation de la vitesse de convergence (avec le module de continuité). Il n'est pas absurde de voir la formule de TAYLOR comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes. Les polynômes d'interpolation de LAGRANGE peuvent être mentionnés en mettant en évidence les problèmes qu'ils engendrent du point de vue de l'approximation. La résolution de l'équation de la chaleur et/ou des ondes peut trouver sa place dans cette leçon.

Pour aller plus loin, le théorème de FEJÉR (versions L^1, L^p ou $C(\mathbf{T})$) offre aussi la possibilité d'un

3. en prenant garde que la densité des fonctions continues à support compact dans L^p elle-même est une construction indépendante de ce résultat.

joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de FOURIER sur L^1, ...), mais on peut aussi s'intéresser à la convolution avec d'autres noyaux.

213 : Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est bon de connaître et savoir justifier le critère de densité des sous-espaces par passage à l'orthogonal. Il faut aussi illustrer la leçon par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de FOURIER,...).

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne, notions qui mettent en difficulé nombre de candidats. De plus, la formule de la projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie d'un espace de HILBERT doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de GRAMM-SCHMIDT. Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de HILBERT H est régulièrement mentionné. Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n\geqslant 0} (x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0} |(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut illustrer agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de HILBERT peut être explorée. Enfin, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut être abordé.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formulation des multiplicateurs de LAGRANGE. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : HÖLDER, CARLEMAN, HADAMARD,... En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel » est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent.

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles, mais aussi de ce qui les distingue. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). La méthode du gradient pour la minimisation de la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, conduit à des calculs de différentielles qui doivent être acquis par tout candidat.

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

218 : Applications des formules de Taylor.

Il faut connaître les formules de Taylor et certains développements très classiques et surtout être capable de faire la différence entre les formules et de maîtriser leurs champs d'application. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent. De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour aller plus loin, on peut mentionner des applications en algèbre bilinéaire (lemme de Morse), en géométrie (étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique ou l'étude de consistance de l'approximation de $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ par différences finies. On soignera particulièrement le choix des développements.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes sont nombreuses et elles peuvent illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremums y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x) - (b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de Lagrange. À ce sujet, une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. Enfin, la question de la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de Newton.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés, ou, dans un autre registre, le principe du maximum et ses applications.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

C'est l'occasion de rappeler une nouvelle fois que le jury s'alarme des nombreux défauts de maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il est regrettable de voir des candidats ne connaître qu'un énoncé pour les fonctions globalement lipschitziennes ou, plus grave, mélanger les conditions sur la variable de temps et d'état. La notion de solution maximale et le théorème de sortie de tout compact sont nécessaires. Bien évidemment, le jury attend des exemples d'équations différentielles non linéaires. Le lemme de Grönwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est trop rarement énoncé. L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.

Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations de bon goût comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que le sujet y invite clairement.

Il est possible d'évoquer les problématiques de l'approximation numérique dans cette leçon en présentant le point de vue du schéma d'EULER. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à cœfficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être exploitées.

Le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (STURM, HILL-MATHIEU,...) sont aussi d'autres possibilités.

222 : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ avec des conditions de DIRICHLET en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de FOURIER trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur dans différents contextes, l'équation des ondes ou de SCHRÖDINGER dans le cadre des fonctions périodiques. Des raisonnements exploitant la transformée de FOURIER peuvent également être présentés.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Des développements plus sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec le théorème de LAX-MILGRAM, l'espace de SOBOLEV $H_0^1(]0,1[)$, jusqu'à la décomposition spectrale des opérateurs compacts, ou encore sur celui des distributions avec, par exemple, l'étude des solutions élémentaires du laplacien.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes. Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de CESÀRO doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes de la leçon 226 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de NEWTON peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon doit permettre aux candidats d'exprimer leur savoir-faire sur les techniques d'analyse élémentaire que ce soit sur les suites, les séries ou les intégrales. On peut par exemple établir un développement asymptotique à quelques termes des sommes partielles de la série harmonique, ou bien la formule de STIRLING que ce soit dans sa version factorielle ou pour la fonction Γ. On peut également s'intéresser aux comportements autour des singularités de fonctions spéciales célèbres. Du côté de l'intégration, on peut évaluer la vitesse de divergence de l'intégrale de la valeur absolue du sinus cardinal, avec des applications pour les séries de FOURIER, voire présenter la méthode de LAPLACE.

Par ailleurs, le thème de la leçon permet l'étude de suites récurrentes (autres que le poncif $u_{n+1} = \sin(u_n)$), plus généralement de suites ou de fonctions définies implicitement, ou encore des études asymptotiques de solutions d'équations différentielles (sans résolution explicite).

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Citer au moins un théorème de point fixe dans cette leçon est pertinent. Le jury attend d'autres exemples que la sempiternelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes). La notion de points attractifs ou répulsifs peut illustrer cette leçon.

L'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connu, notamment le lien avec l'aspect vectoriel, d'ailleurs ce dernier point est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

La formulation de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de NEWTON (avec sa généralisation au moins dans $\mathbf{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'EULER,...

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée. Le jury s'attend évidemment à ce que le candidat connaisse et puisse calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. De façon plus fine, on peut s'intéresser aux fonctions continues nulle part dérivables.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes ou des fonctions monotones relève de cette leçon. L'étude de la dérivée au sens des distributions de $x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour une fonction intégrable $f \in L^1([a, b])$ est un résultat intéressant qui peut trouver sa place dans cette leçon.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax - b||^2$ pourront illustrer agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats maîtrisant ces notions peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de Riemann, comparaison séries et intégrales,...). Le manque d'exemples est à déplorer.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de Fourier ou aux séries entières).

Enfin le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, mais il rappelle aussi que la transformation d'Abel trouve toute sa place dans cette leçon.

233 : Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

Dans cette leçon de synthèse, les notions de norme matricielle et de rayon spectral sont centrales, en lien avec le conditionnement et avec la convergence des méthodes itératives ; elles doivent être développées. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, doit être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence.

Le jury invite les candidats à étudier diverses méthodes issues de contextes variés : résolution de systèmes linéaires, optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de puissance pour la recherche de valeurs propres. Les candidats pourront également envisager les schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires.

234 : Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Cette leçon nécessite d'avoir compris les notions de presque partout (comme par exemple les opérations sur les ensembles négligeables) et évidemment la définition des espaces L^p. Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $L^2 \subset L^1$ (ou même $L^p \subset L^q$ si $p \geqslant q$). Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution comme par exemple le produit de convolution de deux fonctions de L^1. Les espaces associés à la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ ou $\mathbf{Z}$ fournissent des exemples pertinents non triviaux qui peuvent être exploités dans cette leçon. Par ailleurs, des exemples issus des probabilités peuvent tout à fait être mentionnés.

Pour aller plus loin, la complétude de L^p (p fini ou infini) offre aussi un bon développement. On peut aussi penser à certains résultats sur le caractère fini dimensionnel des sous-espaces fermés de L^p dont les éléments ont des propriétés remarquables (par exemple être dans L^∞). Enfin, le cas particulier hilbertien $p = 2$ mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de HILBERT.

235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme, ou de la convergence normale (dans le cas de séries de fonctions).

Les théorèmes de convergence dominée, de convergence monotone et le théorème de FUBINI (et FUBINI-TONELLI) ont leur place dans cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces réultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion tant désirée. Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de FOURIER et/ou de la transformée de LAPLACE.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus, ainsi que des exemples faisant intervenir les intégrales multiples comme le calcul de l'intégrale d'une gaussienne. Le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne doit pas poser de problèmes insurmontables. Le calcul de la transformation de FOURIER d'une gaussienne a sa place dans cette leçon.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de FOURIER ou du théorème de PLANCHEREL. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de FUBINI, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est aussi possible d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, *etc.*).

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Souvent les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent. Cette leçon peut être enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'EULER fournissent un développement standard (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique). Les différentes transformations classiques (FOURIER, LAPLACE,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de DIRICHLET par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de FOURIER, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de FOURIER), ainsi que de la convolution.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Les résultats généraux énoncés, on attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries de FOURIER. On pourra éventuellement s'intéresser aussi aux séries de DIRICHLET. Il y a beaucoup de développements possibles et les candidats n'ont généralement aucun mal à trouver des idées que ce soit à un niveau élémentaire mais fourni en exemples pertinents ou plus avancé, voire nécessitant une certaine technicité. Par exemple, les théorèmes taubériens offrent une belle palette de développements. Toutefois, il faut vraiment que la leçon soit riche en exemples.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Les candidats évoquent souvent des critères (CAUCHY, D'ALEMBERT) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de CAUCHY-HADAMARD. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1-z)$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence vis à vis des différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

Le théorème d'ABEL (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On pourra aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Les résultats autour de l'analyticité, ou encore le principe du maximum, le principe des zéros isolés, sont bien sûr cruciaux. Le lemme de SCHWARZ est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète).

La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta, ...).

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de RIEMANN est par exemple un développement de très bon niveau mais qui nécessite une bonne maîtrise.

246 : Séries de FOURIER. Exemples et applications.

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, FEJÉR, DIRICHLET, ...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ (qu'il peut être plus prudent d'éviter en général). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série FOURIER sans utiliser le théorème de DIRICHLET. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de POISSON et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de FOURIER divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les cœfficients de FOURIER. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peuvent illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

250 : Transformation de FOURIER. Applications.

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de FOURIER » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de FOURIER sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de FOURIER, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de FOURIER. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de FOURIER doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir montrer le lemme de RIEMANN-LEBESGUE pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de FOURIER pour une fonction L^1 dont la transformée de FOURIER est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de FOURIER à l'espace L^2 par FOURIER-PLANCHEREL. Des exemples explicites de calcul de transformations de FOURIER, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de FOURIER des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de FOURIER envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de FOURIER maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de FOURIER peuvent être données dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de FOURIER de la valeur principale.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telle que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés de fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type BRUNN-MINKOWSKI ou HADAMARD. Par ailleurs, l'inégalité de JENSEN a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de HAHN-BANACH. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Le jury attend des candidats qu'ils donnent la définition des moments centrés, qu'ils rappellent les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Le candidat peut citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment BERNOULLI, binomiale, géométrique, POISSON, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de MARKOV, de BIENAYMÉ-CHEBYSHEV, de JENSEN et de CAUCHY-SCHWARZ) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments pourra être présentée ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

Pour aller plus loin, le comportement des moyennes empiriques pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées n'admettant pas d'espérance pourra être étudié. Pour les candidats suffisamment à l'aise avec ce sujet, l'espérance conditionnelle pourra aussi être abordée.

261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Le candidat doit être en mesure de calculer la fonction caractéristique des lois usuelles. Les liens entre la fonction caractéristique et la transformée de FOURIER sont des attendus du jury. Le jury attend l'énoncé du théorème de LÉVY, que les candidats en comprennent la portée, et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite.

Pour aller plus loin, des applications pertinentes de ces résultats seront les bienvenues. Enfin, la transformée de LAPLACE pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. On peut par ailleurs exiger de connaître au moins l'architecture des preuves. L'étude de maximum et minimum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi peut nourrir de nombreux exemples.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de BOREL-CANTELLI, les fonctions génératrices,...) ou donner des inégalités de grandes déviations. Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de KOLMOGOROV peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire à densité et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Certains candidats trouveront utile de mentionner le théorème de RADON-NIKODYM, même s'il ne s'agit pas de faire un cours abstrait sur l'absolue continuité. Le lien entre indépendance et produit des densités est un outil important. Le lien entre la somme de variables indépendantes et la convolution de leurs densités est trop souvent oublié. Ce résultat général peut être illustré par des exemples issus des lois usuelles.

Les candidats pourront expliquer comment fabriquer n'importe quelle variable aléatoire à partir d'une variable uniforme sur $[0, 1]$.

Les candidats proposent parfois en développement la caractérisation de la loi exponentielle comme étant l'unique loi absolument continue sans mémoire : c'est une bonne idée de développement de niveau élémentaire pour autant que les hypothèses soient bien posées et toutes les étapes bien justifiées. On pourra pousser ce développement à un niveau supérieur en s'intéressant au minimum ou aux sommes de telles lois. La preuve du théorème de SCHEFFÉ sur la convergence en loi peut faire l'objet d'une partie d'un développement. La loi de CAUCHY offre encore des idées de développements intéressants (par exemple en la reliant au quotient de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée).

Pour aller plus loin, les candidats pourront aborder la notion de vecteurs gaussiens et son lien avec le théorème central limite. On peut aussi proposer en développement le théorème de COCHRAN.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de BERNOULLI, binomiale et de POISSON doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de BERNOULLI.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de GALTON-WATSON peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de MARKOV à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

5.4 Épreuves orales Option D

5.4.1 L'épreuve de leçon de mathématiques de l'option D

Dans cette épreuve, le candidat tire au sort un couple de sujets au sein d'une sélection d'une quarantaine de leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités extraite de la liste générale des autres options du concours. Cette sélection avait été rendue publique dans le rapport du jury 2016 ; la sélection qui sera utilisée en 2018 est publiée en annexe du présent document. **Il n'y a pas nécessairement un sujet d'algèbre et un sujet d'analyse** : les couples de leçons proposés au tirage au sort peuvent comprendre deux sujets d'algèbre ou deux sujets d'analyse, par exemple : *Variables aléatoires discrètes* et *Fonctions monotones*. Le jury met donc les candidats en garde contre toute tentation de faire l'impasse sur une partie du programme. Les candidats de cette option préfèrent souvent, lorsque ce choix leur est donné, les sujets relevant de l'algèbre. Toutefois les modalités de formation des couplages de leçons rendent hasardeuse toute stratégie de préparation qui négligerait les connaissances en analyse et probabilités.

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options ; la grille de notation et les critères d'évaluation sont strictement identiques. Les remarques détaillées concernant cette épreuve ne sont pas différentes des remarques concernant les épreuves de leçon des autres options et le lecteur est invité à se reporter aux sections précédentes de ce rapport.

5.4.2 L'épreuve orale de leçon d'informatique fondamentale de l'option D

De manière générale, le jury a apprécié la qualité de nombreuses leçons présentées, dans les différents domaines, ce qui confirme le bon travail des préparations spécifiques en amont du concours.

Ceci est particulièrement net dans les plans des présentations proposées. Beaucoup de candidats cernent bien le sujet de leurs leçons et proposent des développements intéressants, même si une plus grande diversité dans les développements proposés serait souhaitable.

A contrario, le jury a constaté que certains candidats ont choisi l'option D apparemment sans avoir identifié les connaissances attendues. L'épreuve de la leçon est une épreuve difficile, qui couvre des domaines variés du champ de la science informatique. Elle ne peut être réussie que si elle est préparée sérieusement et sur une période longue. Il serait illusoire de choisir cette option par défaut, sans préparation.

Le niveau constaté est assez hétérogène, ce qui conduit à une grande dispersion des notes. Le jury n'hésite pas à utiliser toute l'étendue de la plage de notation.

Organisation de la leçon Le jury rappelle qu'il s'agit bien d'une épreuve d'informatique fondamentale, et non pas d'outils mathématiques pour l'informatique. Il appartient au candidat de montrer la pertinence des outils mathématiques qu'il développe vis-à-vis des objectifs du thème informatique développé dans la leçon. La présentation d'outils mathématiques pour eux-mêmes s'apparente donc à un hors-sujet. Ce point avait déjà été souligné dans les précédents rapports et les titres des leçons ont été précisés en conséquence. Les titres de nombreuses leçons mentionnent explicitement exemples ou/et applications, ce qui devrait ramener le candidat aux réels attendus de l'épreuve.

Deux questions-clés guident les attendus de cette épreuve :

— à quoi cet outil mathématique sert-il dans le cadre informatique considéré ? Quels exemples pertinents peuvent décrire son application concrète ?

— la complexité ou le coût de l'utilisation de cet outil sont-ils bien compensés par la qualité supplémentaire d'information qu'il permet d'obtenir ?

Ces questions sont très souvent posées par le jury, sous une forme ou une autre. Le jury invite les candidats à se préparer tout particulièrement à gérer ce type de questions, centrales dans la pédagogie de l'informatique au niveau des lycées et des classes préparatoires.

Enfin, il faut rappeler que lors de la présentation de son plan, le candidat doit proposer au moins deux développements : le jury est attentif d'une part à ce que ces développements entrent strictement dans le cadre de la leçon, et que d'autre part ils ne se réduisent pas à des exemples triviaux. Tout hors sujet est sévèrement pénalisé.

Interaction avec le jury Une large partie de l'épreuve est consacrée à l'interaction avec le jury. Ici, il s'agit plutôt d'explorer de manière plus approfondie les notions qui ont été présentées, les domaines connexes, et surtout les exemples d'application de ces notions.

L'interaction est conduite sous la forme d'un dialogue avec le candidat. Le jury respecte le niveau choisi par le candidat : les questions s'ajustent à ce niveau. De même, toute digression du candidat sur un domaine connexe à celui de la leçon conduira le jury à tester les connaissances du candidat sur ce domaine : les connaissances solides seront récompensées, mais un manque de maîtrise sur des notions choisies par le candidat lui-même sera pénalisé.

Ce long temps d'interaction doit être considéré comme une occasion privilégiée pour le candidat de montrer ses connaissances, de guider le jury dans la direction adéquate. Il est indispensable que les candidats s'entraînent à ce type d'exercice avec leurs préparateurs.

5.4.3 Commentaires sur les leçons d'informatique

Comme pour les thèmes d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités, le programme de l'option informatique évolue pour la session 2018 du concours. Les leçons qui seront proposées en 2018 suivent cette évolution du programme. Les leçons 919 « *Unification : algorithmes et applications.* » et 920 « *Réécriture et formes normales. Exemples.* » sont supprimées. Deux nouvelles leçons ont été introduites : la leçon 929 « *Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.* » et la leçon 930 « *Sémantique des langages de programmation. Exemples.* ».

Les sujets des leçons 2018 se répartissent en quatre grands domaines, bien identifiés :

— algorithmique (avec par exemple la leçon 902 « *Diviser pour régner : exemples et applications* »),
— calculabilité, décidabilité et complexité (avec par exemple la leçon 928 « *Problèmes NP-complets : exemples de réductions* »),
— logique et démonstration (avec par exemple la leçon 918 « *Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.* »),
— théorie des langages de programmation (avec par exemple les nouvelles leçons 929 et 930 et la leçon 923 « *Analyses lexicale et syntaxique : applications.* »).

La suite de cette section décrit plus spécifiquement les attentes pour chacune des leçons qui seront proposées.

901 Structures de données. Exemples et applications.

Le mot algorithme ne figure pas dans l'intitulé de cette leçon, même si l'utilisation des structures de données est évidemment fortement liée à des questions algorithmiques. La leçon doit donc être orientée plutôt sur la question du choix d'une structure de données. Le jury attend du candidat qu'il présente différents types abstraits de structures de données en donnant quelques exemples de leur usage avant de s'intéresser au choix de la structure concrète. Les notions de complexité des opérations usuelles sur la structure de données sont bien sûr essentielles dans cette leçon. Le candidat ne peut se limiter à des structures linéaires simples comme des tableaux ou des listes, mais doit présenter également quelques structures plus complexes, reposant par exemple sur des implantations à l'aide d'arbres.

902 Diviser pour régner. Exemples et applications.

Cette leçon permet au candidat de proposer différents algorithmes utilisant le paradigme diviser pour régner. Le jury attend du candidat que ces exemples soient variés et touchent des domaines différents.

Un calcul de complexité ne peut se limiter au cas où la taille du problème est une puissance exacte de 2, ni à une application directe d'un théorème très général recopié approximativement d'un ouvrage de la bibliothèque de l'agrégation.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

Sur un thème aussi classique, le jury attend des candidats la plus grande précision et la plus grande rigueur.

Ainsi, sur l'exemple du tri rapide, il est attendu du candidat qu'il sache décrire avec soin l'algorithme de partition et en prouver la correction en exhibant un invariant adapté. L'évaluation des complexités dans le cas le pire et en moyenne devra être menée avec rigueur : si on utilise le langage des probabilités, il importe que le candidat sache sur quel espace probabilisé il travaille.

On attend également du candidat qu'il évoque la question du tri en place, des tris stables, ainsi que la représentation en machine des collections triées. Le jury ne manquera pas de demander au candidat des applications non triviales du tri.

906 Programmation dynamique. Exemples et applications.

Même s'il s'agit d'une leçon d'exemples et d'applications, le jury attend des candidats qu'ils présentent les idées générales de la programmation dynamique et en particulier qu'ils aient compris le caractère générique de la technique de mémoïsation. Le jury appréciera que les exemples choisis par le candidat couvrent des domaines variés, et ne se limitent pas au calcul de la longueur de la plus grande sous-séquence commune à deux chaînes de caractères.

Le jury ne manquera pas d'interroger plus particulièrement le candidat sur la question de la correction des algorithmes proposés et sur la question de leur complexité en espace.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

Cette leçon devrait permettre au candidat de présenter une grande variété d'algorithmes et de paradigmes de programmation, et ne devrait pas se limiter au seul problème de la recherche d'un motif dans un texte, surtout si le candidat ne sait présenter que la méthode naïve.

De même, des structures de données plus riches que les tableaux de caractères peuvent montrer leur utilité dans certains algorithmes, qu'il s'agisse d'automates ou d'arbres par exemple.

Cependant, cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, « *Langages rationnels et Automates finis. Exemples et applications.* ». La compression de texte peut faire partie de cette leçon si les algorithmes présentés contiennent effectivement des opérations comme les comparaisons de chaînes : la compression LZW, par exemple, est plus pertinente dans cette leçon que la compression de HUFFMAN.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

Pour cette leçon très classique, il importe de ne pas oublier de donner exemples et applications, ainsi que le demande l'intitulé.

Une approche algorithmique doit être privilégiée dans la présentation des résultats classiques (déterminisation, théorème de KLEENE, etc.) qui pourra utilement être illustrée par des exemples. Le jury pourra naturellement poser des questions telles que : connaissez-vous un algorithme pour décider de l'égalité des langages reconnus par deux automates ? quelle est sa complexité ?

Des applications dans le domaine de l'analyse lexicale et de la compilation entrent naturellement dans le cadre de cette leçon.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : les fonctions récursives. Il est important de faire le lien avec d'autres modèles de calcul, par exemple les machines de TURING. En revanche, la leçon ne peut pas se limiter à l'aspect « *modèle de calcul* » et doit traiter des spécificités de l'approche.

Le candidat doit motiver l'intérêt de ces classes de fonctions sur les entiers et pourra aborder la hiérarchie des fonctions récursives primitives. Enfin, la variété des exemples proposés sera appréciée.

913 Machines de TURING. Applications.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul. Le candidat doit expliquer l'intérêt de disposer d'un modèle formel de calcul et discuter le choix des machines de TURING. La leçon ne peut se réduire à la leçon 914 ou à la leçon 915, même si, bien sûr, la complexité et l'indécidabilité sont des exemples d'applications. Plusieurs développements peuvent être communs avec une des leçons 914, 915, mais il est apprécié qu'un développement spécifique soit proposé, comme le lien avec d'autres modèles de calcul, ou le lien entre diverses variantes des machines de TURING.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

Le programme de l'option offre de très nombreuses possibilités d'exemples. Si les exemples classiques de problèmes sur les machines de Turing figurent naturellement dans la leçon, le jury apprécie des exemples issus d'autres parties du programme : théorie des langages, logique,...

Le jury portera une attention particulière à une formalisation propre des réductions, qui sont parfois très approximatives.

915 Classes de complexité. Exemples.

Le jury attend que le candidat aborde à la fois la complexité en temps et en espace. Il faut naturellement exhiber des exemples de problèmes appartenant aux classes de complexité introduites, et montrer les relations d'inclusion existantes entre ces classes, en abordant le caractère strict ou non de ces inclusions. Le jury s'attend à ce que les notions de réduction polynomiale, de problème complet pour une classe, de robustesse d'une classe vis à vis des modèles de calcul soient abordées.

Parler de décidabilité dans cette leçon serait hors sujet.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité.

Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT.

Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury attend du candidat qu'il présente au moins la déduction naturelle ou un calcul de séquents et qu'il soit capable de développer des preuves dans ce système sur des exemples classiques simples. La présentation des liens entre syntaxe et sémantique, en développant en particulier les questions de correction et complétude, et de l'apport des systèmes de preuves pour l'automatisation des preuves est également attendue.

Le jury appréciera naturellement si des candidats présentent des notions plus élaborées comme la stratégie d'élimination des coupures mais est bien conscient que la maîtrise de leurs subtilités va au-delà du programme.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

Le sujet de la leçon concerne les algorithmes de recherche : les structures de données proposées doivent répondre à une problématique liée aux algorithmes, et la leçon ne peut donc être structurée sur la base d'un catalogue de structures de données.

La recherche d'une clé dans un dictionnaire sera ainsi par exemple l'occasion de définir la structure de données abstraite « dictionnaire », et d'en proposer plusieurs implantations concrètes. De la même façon, on peut évoquer la recherche d'un mot dans un lexique : les arbres préfixes (ou *digital tries*) peuvent alors être présentés. Mais on peut aussi s'intéresser à des domaines plus variés, comme la recherche d'un point dans un nuage (et les *quad-trees*), et bien d'autres encore.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

Cette leçon ne doit pas être confondue avec la 909, qui s'intéresse aux seuls langages rationnels, ni avec la 907, sur l'algorithmique du texte.

Si les notions d'automates finis, de langages rationnels et de grammaires algébriques sont au coeur de cette leçon, l'accent doit être mis sur leur utilisation comme outils pour les analyses lexicale et syntaxique.

Il s'agit donc d'insister sur la différence entre langages rationnels et algébriques, sans perdre de vue l'aspect applicatif : on pensera bien sûr à la compilation. On pourra s'intéresser à la transition entre analyse lexicale et analyse syntaxique, et on pourra présenter les outils associés classiques, sur un exemple simple. Les notions d'ambiguïté et l'aspect algorithmique doivent être développés. La présentation d'un type particulier de grammaire algébrique pour laquelle on sait décrire un algorithme d'analyse syntaxique efficace sera ainsi appréciée. Le programme 2018 permet de nouveaux développements pour cette leçon avec une ouverture sur des aspects élementaires d'analyse sémantique.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

Le jury s'attend à ce que la leçon soit abordée dans l'esprit de l'option informatique, en insistant plus sur la décidabilité/indécidabilité des théories du premier ordre que sur la théorie des modèles.

Il est attendu que le candidat donne au moins un exemple de théorie décidable (respectivement complète) et un exemple de théorie indécidable. Si le jury peut s'attendre à ce que le candidat connaisse l'existence du théorème d'incomplétude, il ne s'attend pas à ce que le candidat en maîtrise la démonstration.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

Cette leçon offre une grande liberté de choix au candidat, qui peut décider de présenter des algorithmes sur des problèmes variés : connexité, diamètre, arbre couvrant, flot maximal, plus court chemin, cycle eulérien, *etc.* mais aussi des problèmes plus difficiles, comme la couverture de sommets ou la recherche d'un cycle hamiltonien, pour lesquels il pourra proposer des algorithmes d'approximation ou des heuristiques usuelles. Une preuve de correction des algorithmes proposés sera évidemment appréciée. Il est attendu que diverses représentations des graphes soient présentées et comparées, en particulier en termes de complexité.

926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples.

Il s'agit ici d'une leçon d'exemples. Le candidat prendra soin de proposer l'analyse d'algorithmes portant sur des domaines variés, avec des méthodes d'analyse également variées : approche combinatoire ou probabiliste, analyse en moyenne ou dans le cas le pire.

Si la complexité en temps est centrale dans la leçon, la complexité en espace ne doit pas être négligée. La notion de complexité amortie a également toute sa place dans cette leçon, sur un exemple bien choisi, comme *union find* (ce n'est qu'un exemple).

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

Le jury attend du candidat qu'il traite des exemples d'algorithmes récursifs et des exemples d'algorithmes itératifs.

En particulier, le candidat doit présenter des exemples mettant en évidence l'intérêt de la notion d'invariant pour la correction partielle et celle de variant pour la terminaison des segments itératifs.

Une formalisation comme la logique de HOARE pourra utilement être introduite dans cette leçon, à condition toutefois que le candidat en maîtrise le langage. Des exemples non triviaux de correction d'algorithmes seront proposés. Un exemple de raisonnement type pour prouver la correction des algorithmes gloutons pourra éventuellement faire l'objet d'un développement.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réductions.

L'objectif ne doit pas être de dresser un catalogue le plus exhaustif possible ; en revanche, pour chaque exemple, il est attendu que le candidat puisse au moins expliquer clairement le problème considéré, et indiquer de quel autre problème une réduction permet de prouver sa NP-complétude.

Les exemples de réduction polynomiale seront autant que possible choisis dans des domaines variés : graphes, arithmétique, logique, etc. Un exemple de problème NP-complet dans sa généralité qui devient P si on contraint davantage les hypothèses pourra être présenté, ou encore un algorithme P approximant un problème NP-complet.

Si les dessins sont les bienvenus lors du développement, le jury attend une définition claire et concise de la fonction associant, à toute instance du premier problème, une instance du second ainsi que la preuve rigoureuse que cette fonction permet la réduction choisie.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

Il s'agit de présenter un modèle de calcul : le lambda-calcul pur. Il est important de faire le lien avec au moins un autre modèle de calcul, par exemple les machines de Turing ou les fonctions récursives. Néanmoins, la leçon doit traiter des spécificités du lambda-calcul. Ainsi le candidat doit motiver l'intérêt du lambda-calcul pur sur les entiers et pourra aborder la façon dont il permet de définir et d'utiliser des types de données (booléens, couples, listes, arbres).

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

L'objectif est de formaliser ce qu'est un programme : introduction des sémantiques opérationelle et dénotationelle, dans le but de pouvoir faire des preuves de programmes, des preuves d'équivalence, des preuves de correction de traduction.

Ces notions sont typiquement introduites sur un langage de programmation (impératif) jouet. On peut tout à fait se limiter à un langage qui ne nécessite pas l'introduction des CPOs et des théorèmes de point fixe généraux. En revanche, on s'attend ici à ce que les liens entre sémantique opérationelle et dénotationelle soient étudiés (toujours dans le cas d'un langage jouet). Il est aussi important que la leçon présente des exemples d'utilisation des notions introduites, comme des preuves d'équivalence de programmes ou des preuves de correction de programmes.

Chapitre 6

Épreuves orales de modélisation

6.1 Déroulement des épreuves de modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées pour l'épreuve de modélisation :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Modélisation et Analyse de systèmes informatiques.

L'épreuve comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée totale est d'une heure. L'interrogation est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Ce minutage adopté pour la session 2017 sera reconduit en 2018.

Même si le format de cette épreuve est moins « académique » que celui des deux autres épreuves orales, les candidats ne sont dispensés en aucun cas de faire preuve de la rigueur mathématique requise : utiliser un théorème signifie impérativement qu'il faut être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses minimales, mais l'énoncé donné doit au moins être correct ! Les candidats doivent être en mesure soit de vérifier que cet énoncé s'applique effectivement au contexte considéré, soit d'expliquer en quoi l'énoncé connu ne s'applique pas tout à fait à ce contexte.

Cette épreuve de modélisation doit permettre aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques / informatiques (pour l'option D), les qualités de synthèse, de réflexion et de mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la capacité à illustrer de manière pertinente le propos mathématique à l'aide de l'outil informatique, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiatives. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout et la richesse du dialogue avec le jury est élément clef de l'évaluation.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique / informatique (pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, partiels ou allusifs, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques / informatiques pour justifier certains points mentionnés dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

6.1.1 Les textes de l'épreuve de modélisation

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte de 5 à 6 pages (hors l'exercice de programmation pour l'option D) que le candidat choisit parmi les deux qui lui sont proposés.

Ces textes sont introduits, pour les options A, B, C, par le bandeau

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Pour l'option D, le bandeau est

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. L'exercice de programmation doit être présenté lors de l'exposé. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Les textes se terminent par les recommandations suivantes : pour les options A, B, C

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

et pour l'option D

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur, notamment à travers l'exercice de programmation.*

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels) mais ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres, s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter ou s'il répond à la difficulté mathématique soulevée par le texte. Le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif mais aussi qu'ils démontrent certains résultats évoqués dans le texte. *A contrario*, un exposé dont les interprétations qualitatives du comportement du modèle proposé seraient absentes ne peut être satisfaisant : montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques //agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, se faire une idée des attentes du jury, s'exercer à produire des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte ou avoir des exemples d'exercices de programmation pour l'option D.

6.1.2 La préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à la bibliothèque du concours et peuvent utiliser leurs propres ouvrages. Ils disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site //agreg.org. Les candidats retrouvent ce même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels mis à disposition le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert pour l'épreuve.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Une des orginalités de l'épreuve est d'offrir un temps d'exposé relativement long avec une très grande liberté pour exploiter ce temps : l'organisation d'un exposé structuré et cohérent doit donc faire l'objet d'une réflexion spécifique et approfondie durant la préparation.

6.1.3 L'exposé

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine de la salle d'interrogation (dont l'environnement est identifique à celui de la salle de préparation). Les candidats sont invités à commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Ce plan permet au jury d'avoir une vision globale de l'exposé et d'aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Les candidats se voient rappeler en début d'épreuve que l'exposé est destiné à un public qui découvre les problématiques du texte et qu'il doit lui permettre, sans connaissances préalables du texte, d'en comprendre les enjeux. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidats peuvent utiliser leurs notes ; ils disposent d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau et la présentation d'illustrations informatiques. Celles-ci peuvent intervenir à tout moment au cours de l'exposé, selon ce que les candidats estiment le plus pertinent pour étayer leur propos. Les candidats doivent gérer correctement le tableau, écrire de façon propre et lisible, et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer (le jury peut souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats). Le jury a sous les yeux un exemplaire des textes ; les candidats peuvent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. La réécriture au tableau de longs passages du texte, sans apport personnel, ne présente aucun intérêt. Même si les programmes informatiques ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Dans certains cas le jury peut guider les candidats pour corriger leur code et ainsi produire un résultat. L'illustration informatique doit intervenir durant cette partie de l'épreuve dévolue à l'exposé. Si les candidats n'ont pas encore utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps imparti, ils en sont avisé par le jury qui rappelle cette exigence.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, sur un même texte, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une trop brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes,...) sans lien avec le problème de départ ne peut donner satisfaction.

De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut pas non plus être positivement évalué. La paraphrase est lourdement sanctionnée. Un texte traité de façon partielle mais en profondeur peut donner une note élevée. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est dédié pour approfondir le contenu proposé par le texte. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui s'approprient le texte, ou une partie substantielle de celui-ci, et en donnent une présentation pertinente.

Les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances, sur des aspects variés du programme, pour enrichir leur propos, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats éprouvent des difficultés à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

A contrario, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Les candidats ne doivent pas se contenter de ces esquisses de démonstration. S'ils en font mention, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur. Le jury valorise tous les « trous » que le candidat aura repérés et comblés par lui-même. Le jury n'est pas dupe des candidats qui tentent de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration. Il ne se laisse pas tromper non plus par les candidats qui font des indications du texte un argument d'autorité, tentative maladroite de masquer des insuffisances techniques. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de Xxx que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus payante, qui est valorisée.

6.1.4 Les échanges avec le jury

Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander l'énoncé précis d'un théorème utilisé pour démontrer une assertion. Il peut aussi demander des détails sur les méthodes numériques utilisées pour produire l'illustration informatique. Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques elles-mêmes ou les exercices de programmation pour l'option D. Le texte, et la présentation faite par le candidat, nourrissent toujours cette phase de dialogue.

6.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien.

6.2.1 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une grande majorité des textes contient une figure qu'une première étape peut consister à reproduire. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue. Le jury rappelle que même si les simulations ne sont pas abouties, il sait valoriser la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

Le jury reconnaît le bel effort produit par la majorité des candidats. Un nombre limité d'entre eux persiste cependant à ne pas toucher à l'outil informatique. Espérer ainsi consacrer plus de temps à l'analyse du texte ne peut être une stratégie payante, l'illustration informatique étant un item spécifique de la grille de notation.

Il est important de rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Présenter le code source de façon détaillée n'est pas indispensable, le jury sera plus sensible à une présentation de résultats d'exécution et/ou une représentation graphique clairement commentées oralement par le candidat. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

6.2.2 Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie. Il peut s'agir pour eux d'un moyen d'attirer le jury sur un terrain favorable, pour lequel ils manifestent un certain goût, puisqu'ils l'ont choisi dans le menu des options. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de Fourier, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces L^p d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités, ...).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle,...).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective.

Les commentaires détaillés des leçons contiennent un certain nombre de pistes, sûrement non exhaustives, dans cette direction.

6.3 Option A : Probabilités et Statistiques

6.3.1 Commentaires généraux

Les deux aspects, probabiliste et statistique, forment un tout cohérent dans l'étude des phénomènes aléatoires, et les textes proposés mêlent souvent ces deux points de vue. Cependant, il n'est pas impossible de se voir proposer le choix entre deux textes où l'aspect statistique est plus marqué : il est donc nécessaire que les candidats fassent un effort de formation statistique. La part importante de la statistique dans l'enseignement et les applications des mathématiques justifient cet investissement.

En outre, la difficulté des textes étant progressive, une honnête maîtrise des fondamentaux du programme permet, sans virtuosité technique, d'aborder l'épreuve favorablement. Il n'est pas rare qu'un texte commence avec des résultats classiques, par exemple la loi des grands nombres ou le théorème central limite. Être à l'aise avec ces notions (hypothèses précises et conclusion) permet de démarrer l'exposé en confiance.

Le jury met en garde contre la paraphrase : il est stérile de chercher à traiter l'intégralité du texte sans y apporter de plus-value. Il est bien plus judicieux d'aborder un passage éventuellement limité mais de manière détaillée et en donnant tous les arguments pertinents. De nombreuses affirmations des textes ne sont pas justifiées et les candidats doivent réfléchir durant leur préparation aux arguments qui les rendent rigoureuses : le jury s'attend à ce que le candidat fournisse les éléments manquants (ou, à défaut, des pistes). Par exemple si dans le texte une espérance et une somme infinie sont échangées, il faut justifier une telle permutation.

6.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury incite à porter un effort tout particulier de préparation sur les notions suivantes, qui reviennent souvent dans les questions qu'il pose et sur lesquelles on pourrait attendre des connaissances plus solides.

- **Méthodes classiques en probabilités** (définition de la loi $\mathbf{P}_X$ de X, calcul de la loi de $f(X)$ à partir de $\mathbf{P}_X$, probabilités conditionnelles et formules des probabilités totales ou de l'espérance totale, calcul de $\mathbf{E}(f(X,Y))$ en fonction de la loi du couple (X,Y)). À titre d'exemple, le calcul de $\mathbf{P}(X=Y)$ lorsque X,Y sont indépendantes et que X n'a pas d'atome pose souvent problème. Le jury regrette aussi les confusions entre $\mathbf{P}$ (probabilité sur Ω) et $\mathbf{P}_X$ (probabilité sur l'ensemble des valeurs de X).
- **Différents modes de convergence** (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et implications sont des questions fréquemment posées et leur manipulation devrait être familière aux candidats (par exemple, si $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$, a-t-on $f(X_n) \to f(X)$ ou $(X_n, Y_n) \to (X,Y)$?).
- **La loi des grands nombres et le théorème central limite.** Ce sont des incontournables de l'épreuve et il faut en maîtriser les hypothèses et la conclusion, notamment le sens de la convergence énoncée. Il est utile de percevoir que le théorème central limite précise la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres. Le jury encourage les candidats à être attentifs à la place (numérateur ou dénominateur) du $\sqrt{n}$ dans ce théorème ! Du point de vue de l'estimation d'un paramètre, la loi des grands nombres met un estimateur en évidence et le théorème central limite permet de construire un intervalle de confiance (asymptotique). Rappelons que la loi faible des grands nombres a des hypothèses plus fortes et une conclusion plus faible que la loi forte. Elle n'a donc pas d'intérêt autre que pédagogique, en raison de la simplicité de sa preuve.
- **Intervalles de confiance.** De très nombreux textes invitent à fabriquer un intervalle de confiance dans différents contextes. Le jury suggère aux candidats de clarifier leurs idées à ce sujet : un tel intervalle sert à préciser l'estimation d'un paramètre qu'il convient d'abord d'identifier, cet intervalle est aléatoire, fabriqué à partir des observations et ses bornes ne doivent pas

s'exprimer en fonction du paramètre à estimer. Il faut pouvoir expliquer précisément comment le lemme de Slutsky permet de remplacer des valeurs théoriques inconnues par des valeurs empiriques.

— **Chaînes de Markov.** Énoncer les propriétés de Markov faible et forte pose souvent d'insurmontables difficultés. La présentation récursive $X_{n+1} = f(X_n, \varepsilon_{n+1})$ d'une chaîne de Markov est importante et le jury est satisfait de voir qu'elle est souvent reconnue. La notion de mesure stationnaire (ou invariante) doit pouvoir être interprétée de manière à la fois matricielle et probabiliste. Le sens des mots « classe (de communication) », « irréductible », « récurrent », « récurrent positif », « apériodique » mérite d'être précisément connu.
— **Espérance conditionnelle.** Le jury demande souvent d'en formuler la définition précise. En outre, il est indispensable d'avoir déjà fait quelques calculs concrets d'espérance conditionnelle : calculer $\mathbf{E}(f(X,Y)|Y)$ lorsque X, Y sont indépendantes ou lorsque le couple (X,Y) admet une densité est un exemple fondamental et récurrent. Si A est un évènement et Y une variable aléatoire, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A|Y)$ doit être comprise comme $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A|Y)$. À chaque fois qu'un conditionnement est écrit, il est recommandé d'avoir le réflexe de se demander s'il s'agit d'un conditionnement élémentaire (par un évènement de probabilité strictement positive) ou non.
— **Martingales.** Ce concept ne doit pas être confondu avec celui de chaîne de Markov. Il s'agit d'un outil parfois utile pour prouver des convergences presque-sûres ou L^2.
— **Modèle linéaire.** Il s'agit essentiellement de comprendre que la minimisation d'une distance euclidienne est assurée par une projection orthogonale. Il est bon de savoir que la projection orthogonale sur F est simplement caractérisée par son action sur F et sur $F^\perp$.
— **Vecteurs gaussiens.** Connaître la définition précise en termes de combinaison linéaire des composantes est indispensable et permet de voir qu'une application affine conserve l'ensemble des vecteurs gaussiens, modifiant moyenne et covariance. Le théorème de Cochran, problématique pour de nombreux candidats, s'en déduit immédiatement car des projections orthogonales Π_V, Π_W sur des espaces orthogonaux vérifient $\Pi_V \Pi_V^T = \Pi_V$ et $\Pi_V \Pi_W = 0$.
— **Tests statistiques.** Le principe général est souvent mal connu. Rappelons qu'un test fixe deux hypothèses H_0, H_1 et un niveau α, qu'il majore la probabilité de rejeter H_0 sous H_0 par α et qu'il évalue aussi la puissance (probabilité d'accepter H_1 sous H_1). Ainsi, lorsqu'un test est présenté, la région de rejet doit apparaître clairement. Les tests d'adéquation du χ^2 et de Kolmogorov-Smirnov méritent d'être connus précisément.

Le jury se réjouit des progrès enregistrés lors de cette session en ce qui concerne la connaissance des lois usuelles, la loi des grands nombres et le modèle linéaire.

6.3.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury suggère aux candidats de réfléchir aux illustrations informatiques pertinentes en probabilités et statistiques. La présentation d'un test doit faire apparaître clairement la valeur de la statistique de test obtenue et le quantile de la loi pertinente. Si un intervalle de confiance I_n dépend de n observations, les candidats gagneront à présenter graphiquement l'évolution $n \mapsto I_n$. Illustrer le comportement asymptotique d'une suite de variables aléatoires demande de savoir étudier les différents modes de convergence. Une convergence presque-sûre se voit sur une trajectoire. Une convergence en loi demande de simuler un échantillon, de représenter l'histogramme ou la fonction de répartition empirique associés et de pouvoir expliquer pourquoi ces tracés empiriques sont proches de leurs pendants théoriques. De manière générale, lorsqu'un programme mêle une boucle et un aléa, il faut se demander si l'aléa doit être simulé avant la boucle ou bien à chaque étape de cette dernière.

S'il est parfaitement légitime d'utiliser les routines préprogrammées dans les logiciels disponibles, il pourra être pertinent de connaître la base de leurs fonctionnements (calcul d'une fonction de répartition ou d'un quantile, simulation de lois usuelles, simulation de chaînes de Markov, calcul de mesures stationnaires).

Rappelons que de nombreux textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Ce traitement constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels `Python`, `Scilab`, `Octave` et `R`, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A.

Enfin, s'il est bon que les choix de modélisation soient commentés, il ne s'agit pas de se livrer à une critique gratuite et systématique de toutes les hypothèses. Si une hypothèse semble restrictive, il sera judicieux d'expliquer en quoi elle simplifie les calculs. Si une généralisation est suggérée, il pourra être intéressant de signaler les complications techniques qu'elle entraînerait. Le jury valorise les efforts faits pour interpréter la signification sur le modèle des résultats mathématiques obtenus.

6.4 Option B : Calcul scientifique

6.4.1 Commentaires généraux

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une majorité des candidats admissibles, une part importante d'entre eux ne maîtrisent tout simplement pas les notions de base du programme général intervenant dans les textes. Afin d'aborder sereinement les textes proposés dans l'option B, le jury rappelle qu'il attend des candidats de :

- Connaître le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- Construire, analyser et mettre en œuvre la méthode d'EULER explicite.
- Connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de GAUSS, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- Analyser et mettre en œuvre la méthode de NEWTON (cas vectoriel).
- Construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
- être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrêma liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
- Maîtriser les outils d'analyse de FOURIER.
- Connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés est bien entendu exigible.

6.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

- **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.
- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de TAYLOR contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. Les candidats devraient faire preuve d'automatismes à la lecture de la moindre équation différentielle ordinaire. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :
  1. énoncer de façon précise le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
  2. expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour une grande proportion des candidats).
  3. connaître les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Trop de candidats sont pris en défaut sur la notion de solution maximale.
- **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'EULER comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et

l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Trop rares sont les candidats capables de formaliser correctement une définition de la convergence d'un schéma numérique, qui est trop souvent confondue avec la consistance du schéma. La confusion récurrente entre l'approximation X_n et l'évaluation $X(t_n)$ de la solution exacte au temps t_n, l'incapacité à relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt témoignent d'une compréhension déficiente du sujet. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de Cauchy et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (Dirichlet, Neumann, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont trop régulièrement relevées. Au grand étonnement du jury, de nombreux candidats ne font pas le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices sont trop souvent extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles sont mal maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant à la caractérisation et à la recherche d'extrema sont mal connus. On s'attend à ce que le candidat soit capable de préciser les hypothèses requises pour :

1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de Fourier.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de Fourier. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de Fourier doit être connu.

6.4.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elle est clairement présentée, motivée et discutée. Si `Scilab` ou `Python` sont certainement les langages les mieux adaptés, le jury relève qu'un certain nombre de candidats a pu fournir des résultats très convaincants avec un logiciel comme `Octave`, `XCas` ou `Sage`. Le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents. Une présentation `libreoffice` ne peut pas être considérée comme une illustration informatique.

6.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

6.5.1 Commentaires généraux

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'**effectivité**, puis de l'**efficacité** (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreur). Notons que si l'option C dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes, de groupes ou de dénombrement même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option C.

Le programme de l'option C est orienté sur les notions propres au **calcul algébrique effectif**. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécierait que les candidats mènent la réflexion suivante :

— peut-on calculer cet objet ?
— si oui, par quelle(s) méthodes ?
— ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût du système proposé et le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et actuellement quasi–inexistante. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas — la mention rapide de RSA par les candidats dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente. Dans l'idéal, une réflexion minimale sur les ordres de grandeur (est-ce qu'un calcul faisable représente $10^1, 10^{10}, 10^{100}, 10^{1000}$ opérations élémentaires ?) permettrait souvent de mieux situer les problèmes soulevés par un texte, ou de proposer des valeurs de paramètres réalistes quand ce sujet n'est pas évoqué par le texte.

6.5.2 Recommandations spécifiques

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.

— Le jury se réjouit d'observer une amélioration en ce qui concerne l'algèbre linéaire effective. Les candidats maîtrisent un peu mieux les applications de la méthode du pivot de Gauss. Beaucoup d'entre eux connaissent maintenant la complexité de cet algorithme, même s'ils ne savent pas nécessairement bien expliquer l'origine de ce $O(n^3)$.
— Les connaissances sur le résultant restent en général fragiles. Si les candidats interrogés sont en général capables d'en donner une définition, ses propriétés élémentaires et surtout son utilisation pour éliminer des variables dans un système d'équations polynomiales semblent très floues pour de nombreux candidats. Beaucoup le voient comme un critère d'existence d'un facteur commun et ne pensent plus (surtout dans le cas des polynômes à une variable) au PGCD qui est un objet bien plus simple à appréhender.
Le jury attire l'attention des futurs candidats sur le fait que, si le résultant disparaît du programme général en 2018, il continue à figurer dans le programme spécifique de l'option C.
— Le jury se réjouit de constater une progression dans les connaissances théoriques des candidats sur les corps finis. Cependant le rôle du morphisme de Frobenius et son lien avec les racines des polynômes sur les corps fini est souvent mal maîtrisé.
— Par rapport à la session 2016, les connaissances des candidats sur les codes correcteurs ont sensiblement progressé. Rappelons que les codes correcteurs sont une partie limitée du programme, et que très peu de connaissances sont exigibles (et exigées). Toutefois, il est nécessaire de s'y

être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement, qu'un bon code correcteur se décrit de façon compacte (et est donc en général linéaire), a une grande dimension et grande distance minimale (par rapport à sa longueur) et, aussi et surtout, un algorithme de décodage efficace – alors que ce second point n'est pas vrai d'un code linéaire « quelconque ». Il faut avoir déjà un peu étudié le sujet pour comprendre les questions que se pose presque tout texte sur les codes. Signalons enfin que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.

— Si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Cette approche est surprenante alors que l'algorithme d'EUCLIDE **étendu** est explicitement au programme de l'option C.

— Les attentes du jury en termes de complexité sont limitées mais les candidats doivent savoir estimer le coût de certaines procédures classiques au programme : opérations sur les entiers et dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, sur les polynômes (multiplication, division euclidienne, évaluation, interpolation), pivot de GAUSS, algorithme d'EUCLIDE, etc. Sur ce point le jury observe une sensible progression par rapport aux années précédentes, en notant tout de même que, si la notion d'exponentiation rapide est connue de la plupart des candidats, peu d'entre eux savent l'expliquer de façon rigoureuse.

6.5.3 Modélisation et mise en œuvre informatique

Le jury constate avec satisfaction une progression de la moyenne des candidats dans l'utilisation de l'outil informatique et regrette parfois que des candidats ayant préparé un travail d'illustration raisonnable ne le mettent pas plus en valeur durant l'exposé.

Les candidats doivent être capables de justifier la pertinence de leur programmes ou de leurs calculs dans le cadre du texte. Reprendre un morceau de code d'un livre est une démarche tout à fait acceptable à condition que les candidats comprennent exactement ce que fait le code et que cela fasse sens dans le cadre du texte.

Pour finir, le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

6.6 Option D : Modélisation

6.6.1 Commentaires généraux

Le jury interroge les candidats dans le même esprit que dans les autres options et les critères d'évaluation sont identiques sauf en ce qui concerne l'exercice de programmation qui est spécifique. Le jury a apprécié le travail accompli pour la préparation à cette épreuve par les meilleurs candidats.

Attentes du jury Les textes présentent généralement une problématique concrète, informatique ou de la vie de tous les jours, avant d'en proposer une formalisation plus ou moins complète et une analyse informatique plus ou moins détaillée. Ils sont souvent plutôt de nature descriptive et volontairement allusifs.

Exposé des motivations Beaucoup de candidats omettent la phase indispensable d'introduction et de motivation. C'est aux candidats d'introduire le sujet du texte et de motiver la présentation qui va suivre. Cette motivation sera le plus souvent l'évocation de situations concrètes dans lesquelles on a besoin d'outils informatiques spécifiques. Ces situations peuvent être proposées par le texte lui-même, mais elles peuvent aussi être tirées de l'expérience personnelle des candidats. Toute contribution personnelle à ce niveau est toujours très appréciée !

Présentation du texte Il est attendu des candidats une restitution argumentée d'une partie cohérente du texte, ainsi qu'un effort de formalisation sur les parties descriptives et allusives du texte.

Il est bon d'essayer de donner une ou des preuves complètes d'énoncés du texte, ou de compléter les arguments parfois lapidaires fournis par ce dernier. Les énoncés considérés comme vraiment trop difficiles pour être prouvés dans le cadre d'une préparation en temps limité en partant des connaissances du programme sont systématiquement pointés comme devant être admis.

Il est attendu des candidats qu'ils soient fidèles à l'esprit du texte. Il ne s'agit pas de traiter l'intégralité des points du texte, mais que le traitement choisi soit cohérent : les candidats doivent par exemple pouvoir expliquer pourquoi ils ont choisi de développer certains points, et pas certains autres.

L'exposé doit utiliser intelligemment le tableau, sur un mode qui gagnerait à se rapprocher du cours (structure, cohérence de ce qui est écrit au tableau indépendamment du discours) plutôt que de l'exposé de séminaire de recherche.

6.6.2 Exercice de programmation informatique

Nature de l'exercice L'exercice de programmation proposé est en règle générale très simple, et peut presque toujours être traité en une vingtaine de lignes. La simplicité de l'exercice vient du fait que le jury souhaite avant tout tester une capacité (et non une virtuosité) à organiser un programme simple, clair, et pédagogique : le programme doit pouvoir être présenté et les choix (structures de données, style impératif *vs.* fonctionnel, types), argumentés.

Le jury n'accorde pas une importance excessive aux considérations d'élégance ou d'efficacité tant que ce qui est proposé reste dans les limites du raisonnable.

Exposé de l'exercice L'exercice de programmation doit être présenté au jury, ce qui implique un commentaire pertinent en parallèle de la projection du code, qui aide à la compréhension toujours difficile dans un temps court d'un programme écrit par un autre.

La présentation au jury doit être faite, que le programme fonctionne — ce que l'on espère ! — ou pas. C'est seulement dans un deuxième temps que les candidats lancent une exécution. Dans tous les cas, le jury évalue la qualité générale du code réalisé. Cette évaluation interactive permet aux candidats réactifs de repérer une erreur, voire de la corriger, de recompiler et de relancer l'exécution.

Il serait bon que les candidats s'entraînent à cet exercice de présentation d'un programme lors de leur préparation et n'en découvrent pas le sdifficultés le jour de l'épreuve.

Remarques sur le style de programmation Les commentaires sont appréciés par le jury quand ils apportent un plus : spécification, pré ou post-conditions, invariants, complexité ; ils doivent rester en quantité raisonnable, ne pas empêcher la continuité et la lisibilité du code et ne pas être une simple paraphrase du code lui-même.

Tous les exercices sont construits de manière à pouvoir être traités confortablement dans le cadre de tous les langages du programme ; par ailleurs, quand les énoncés disent « tableau » ou « liste », ils sous-entendent toujours « liste ou tableau » à la guise des candidats qui doivent savoir argumenter leur choix – au minimum en expliquant que le langage ou le style de programmation choisi s'accommode mieux de l'un ou de l'autre.

On renvoie aus rapports 2015 et 2016 pour des commentaires plus détaillés, qui restent d'actualité, sur le style de programmation.

Tests Les candidats doivent toujours proposer plusieurs jeux de test, dont si possible un qui ne soit pas totalement « jouet ». Les textes n'en proposant souvent au mieux qu'un, il faut donc prévoir un temps de réflexion sur ce point. Peu de candidats proposent un test différent de celui du texte, et argumentent ce choix (cas dégénéré, passage à l'échelle, etc.) encore plus rarement.

Questions du jury Le jury revient toujours sur l'exercice de programmation, de manière plus ou moins approfondie. Il demande au moins aux candidats

- d'argumenter leurs choix s'ils ne l'ont pas fait au préalable,
- d'indiquer les bibliothèques et les fonctions avancées utilisées et d'expliquer leur comportement (voire demande comment les candidats auraient pu faire sans) – et éventuellement, d'évaluer leur complexité en temps et en espace (cette dernière étant souvent mal comprise / connue). Cela est particulièrement vrai des nombreuses constructions avancées de `Python`.
- de préciser les hypothèses implicites faites sur les données.
- éventuellement, d'expliquer les messages d'erreurs observés à la compilation / l'interprétation / l'exécution.

Ensuite le jury revient sur la partie du texte présentée par les candidats. L'interrogation s'adapte toujours au niveau des candidats. Les questions du jury portent au moins autant sur la démarche globale de modélisation et la compréhension des différentes approches du texte que sur l'étude technique des diverses propositions.

Le jury pose des questions destinées à affiner sa perception de la compréhension du texte par les candidats, à comprendre leur capacité à formaliser une question ou expliciter une preuve s'ils ne l'ont pas montrée d'eux-même, ou encore à tester leur regard critique sur le texte. Enfin, il est fréquent que des questions d'informatique fondamentale soient posées en rapport avec le texte, pour percevoir la capacité à faire le lien entre connaissances théoriques et informatique souvent plus concrète ; les questions de calculabilité et complexité (tant analyse de complexité d'un algorithme que preuve de NP-complétude d'un problème (aidée par le jury)), sont en particulier naturelles et fréquentes.

6.6.3 Observations complémentaires

Exposé On renvoie largement aus commentaires communs aux quatre options sur cette partie : la paraphrase du texte, même agréablement conduite, est à proscrire, le jury cherchant à mesurer principalement l'apport des candidats par rapport au document que ces derniers ont reçu.

Le principal défaut observé est l'absence de formalisation ou de preuve dans le texte – qui conduit souvent à la paraphrase évoquée ci-dessus.

De manière similaire, en 2017, le jury a pu noter un renforcement de la tendance déjà prononcée à se contenter d'arguments ou d'éléments de preuve approximatifs ou superficiels. Il tient à réaffirmer son attachement très fort à ce qu'un candidat fasse pleinement preuve de sa capacité à conduire une démonstration détaillée et rigoureuse sur quelques énoncés (et, idéalement, tout au long de l'exposé) avant de se contenter de preuves plus sommaires. Cela vaut pour les preuves d'énoncés, de correction d'algorithmes, de complexité... (liste non limitative).

Exercice de programmation Cette session 2017 appelle un commentaire positif : l'exercice de programmation est bien accepté, et bien traité par la quasi-totalité des candidats. Une écrasante majorité des programmes fonctionne et fait, de manière plus ou moins efficace ou élégante, ce qui est demandé. Des lectures trop rapides de la spécification conduisent malheureusement à des hors-sujets et les candidats se compliquent souvent la vie. Ce commentaire donne l'occasion de rappeler le point évoqué plus haut *"quand les énoncés disent « tableau » ou « liste », ils sous-entendent toujours « liste ou tableau » à la guise des candidats qui doivent savoir argumenter leur choix"*.

Ce constat postif sur la réalisation de l'exercice de programmation n'empêche pas qu'il reste une marge de progression significative quant à sa présentation orale.

Programme Le surinvestissement de l'exercice noté dans le rapport 2016 s'est quelque peu estompé, et c'est une bonne chose. Le jury réaffirme que la marge de progression de la quasi-totalité des candidats est plus sur le versant « formalisation » évoqué plus haut que sur l'exercice de programmation.

En cas de compléments à l'exercice, les compléments proposés devraient s'efforcer, plus qu'une démonstration de programmation, de constituer une illustration d'un ou de plusieurs points du texte à l'image de ce qui se pratique dans les autres options : illustration d'un algorithme proposé par le texte, étude d'un exemple, expérimentations, étude statistique, mesure de temps ou de complexité en moyenne, *etc.* Dans ce cadre, l'ensemble des outils informatiques présents sur l'ordinateur peuvent être utilisés. On peut même imaginer, pour aller loin dans cette direction, une présentation très expérimentale du texte mettant en lumière les problèmes évoqués par le texte et exposant, sur un ou plusieurs exemples, les solutions proposées, leurs forces et leurs faiblesses. C'est un parti-pris différent de celui de la formalisation mais qui pourrait également donner d'excellents exposés.

Enfin, les candidats ne prennent que rarement le temps de réflexion court mais indispensable pour réfléchir aux aspects algorithmiques (même s'ils sont toujours élémentaires), structurer leur code et définir structures de données et type. Cette réflexion est pourtant nécessaire pour produire un code clair et proposer une présentation bien construite du programme.

Remarque ponctuelle Une bonne part des candidats utilise `CAML` ou `C`, avec quelques utilisateurs de `Python`.

Plusieurs candidats, dont certains très bons candidats, ont été désarçonnés par les messages d'erreur du compilateur ou de l'interprète ; il est important de connaître la signification des plus courants, et de savoir l'expliquer au jury, même si l'on n'a pas été capable de trouver l'erreur.

Connaissances en informatique Elles sont, bien entendu, très inégales suivant les candidats ; cette partie ne constitue pas le cœur de l'épreuve et ne fera donc pas l'objet d'un commentaire extrêmement détaillé. Le jury apprécie néanmoins de constater que beaucoup de candidats ont des notions sérieuses sur des sujets plus « concrets » que le programme – architecture, compilation, aspects système, *etc.* et savent motiver les problématiques des textes à la lumière de ces connaissances.

Annexe A

Evolution du programme pour la session 2018

Le jury a estimé nécessaire de faire évoluer le programme en vue de l'édition 2018. Ces évolutions répondent à plusieurs préoccupations :

— un effort de clarification. Fruit d'ajustements successifs, le programme manquait probablement de lisibilité avec un programme pour les épreuves écrites, un programme complémentaire pour les épreuves orales, un programme commun pour les options A, B, C et enfin des notions spécifiques à chacune des options. La nouvelle mouture simplifie la lecture du programme et vise à mieux mettre en valeur des compétences liées à la conception et à l'analyse d'algorithmes. Cette évolution donne l'occasion de rappeller que les candidats sont vivement incités à exploiter leurs connaissances motivées par la modélisation dans toutes les épreuves orales.

— un effort de précision. Le jury a cherché à éliminer les énoncés maintenant une ambiguïté quant aux attendus. Il s'est aussi evertué à ne pas maintenir « pour la forme » ou en respect de quelques « traditions », des notions, en général délicates, qui ne pouvaient pas facilement trouver leur place dans la liste des leçons proposées. Dans son évaluation, le jury veille au **respect du programme**. Ainsi toutes les notions explicitement dans le programme sont supposées acquises pour les épreuves écrites et peuvent naturellement faire l'objet de questions du jury durant les épreuves orales. Des énoncés plus avancés, quelque soit l'importance qu'on peut leur accorder dans le panorama mathématique, ne peuvent en revanche être considérés comme exigibles. Les candidats qui le souhaitent sont néanmoins invités à explorer ces notions, pourvu qu'ils soient en mesure de les manipuler avec une certaine aisance. Dans ce cas, le jury s'adaptera et suivra les candidats sur les territoires où ils l'auront amené.

— un souci d'équilibre entre les options. Le jury est extrêmement vigilant à ne pas laisser penser que le programme et les attentes privilégieraient une option sur les autres.

Ces préoccupations se sont notamment traduites par une réduction du programme sur le volet Algèbre et Géométrie dont une partie des items devient spécifique à l'option C (notion de résultant par exemple [1]). Une évolution majeure vient de l'introduction d'un nouveau chapitre « Méthodes numériques » qui met mieux en valeur dans le programme les questions, communes à toutes les options, relatives à l'analyse d'algorithmes (méthode de Monte-Carlo, transformée de Fourier rapide, moindres carrés, décomposition en valeurs singulières, algorithme de Newton pour des problèmes vectoriels, schéma d'Euler, méthode de la puissance, *etc.*). Les commentaires des leçons donnent des pistes pour exploiter le contenu de ce chapitre dans les différentes leçons proposées au concours. Il est bien clair aussi que ces notions pourront intervenir dans les sujets de compositions écrites.

Une autre évolution concerne la refonte du chapitre consacré aux **distributions**. Ces notions ont été introduites dans le programme il y a quelques années déjà, en même temps que celles liées à la théorie

1. Cette notion n'apparaît plus dans le programme commun, mais elle constitue toujours un élément central du programme de l'option.

des représentations dans le bloc Algèbre et Géométrie. Toutefois, force est de constater que ce chapitre « distributions » reste encore perçu avec une certaine frilosité, alors que les représentations, au départ jugées tout autant « délicates » ont mieux réussi leur intégration dans le programme et les leçons. Les rudiments de la théorie des représentations sont maintenant largement exploités y compris dans des développements qu'on peut qualifier d'élémentaires. Pourtant, les distributions, formalisées dans les années 50 et 60 par L. SCHWARTZ, font maintenant indéniablement partie du bagage scientifique moderne, avec de multiples applications fondamentales par exemple en physique et en théorie du signal. On en trouve d'ailleurs des présentations dans de nombreuses formations d'ingénieurs, en licence de physique ou dans des formations supérieures de techniciens. Ce constat motive d'accorder toute leur place à ces notions dans un programme de concours destiné, potentiellement, à recruter des intervenants pour ces formations ou, quoiqu'il en soit, dans les formations scientifiques ouvrant sur ces débouchés. La version précédente du programme a peut être pu laisser croire que les distributions devaient être principalement vues sous l'angle de l'analyse fonctionnelle abstraite. Cette vision n'aurait pas été cohérente avec le reste du programme (qui n'aborde pas, par exemple, la dualité dans les espaces de BANACH). Le but est davantage de donner un cadre général permettant de résoudre des équations, des problèmes, où il est pertinent de manipuler des dérivées de fonctions non continues, des expressions impliquant des masses de DIRAC, *etc.* et où les transformées de FOURIER et de LAPLACE se révèlent des outils puissants et efficaces. Le programme a été révisé de manière à clarifier les objectifs de ce chapitre et le présent rapport donne l'occasion de les préciser. Ainsi le programme donne un certain nombre d'exemples simples qu'un candidat à l'agrégation doit savoir manipuler et une section spécifique sur les **applications** de la théorie des distributions donne corps à ces objectifs. Les notions mentionnées au chapitre 12 du programme ont toute vocation à être utilisées dans les sujets d'écrit ; le problème d'analyse du sujet du concours spécial en donne un exemple. Surtout, même si le jury ne proposera pas, au moins pour la session 2018, de leçon *spécifique* sur ces thèmes, il espère vivement que ceux-ci viendront nourrir de nombreux développements originaux et il n'hésitera pas à y faire appel pour animer les phases de dialogue.

La vocation du programme est résolument pratique sans forcément chercher à s'adosser à des fondements théoriques sophistiqués (dont le niveau dépasserait de manière déraisonnable les objectifs d'un tel concours et s'éloignerait du reste du programme). On attend davantage une certaine familiarité avec des exemples significatifs qu'une théorie générale et approfondie. Les rudiments de théorie des distributions attendus, en cohérence avec la plupart des enseignements universitaires ou en école d'ingénieurs sur ce sujet, se limitent à donner un cadre général qui permet de traiter des problèmes variés. Ainsi, la plupart du temps, on est confronté à des objets (les fonctions localement integrables, la masse de DIRAC, la valeur principale de CAUCHY...) dont on observe que leur action sur les fonctions C^∞ à support compact (ou celles de $\mathscr{S}$) définit une forme linéaire vérifiant de plus une estimation du type $|T(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_X$. La constante C dépend éventuellement du support de la fonction test, mais X est un espace de BANACH tout à fait classique (L^p, fonctions continues bornées, fonctions de classe C^k dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées, *etc.*). Comme C_c^∞ et $\mathscr{S}$ sont contenus dans ces espaces X on définit la dérivée de ces objets par simple *transposition* (par $\partial^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\phi)$; c'est maintenant la norme $\|\partial^\alpha\phi\|_X$ qui intervient pour justifier que cette expression garde un sens). Cette notion de **dérivation faible** doit être vue comme au cœur du programme. Elle conduit d'ailleurs à définir l'espace de SOBOLEV H^1 — l'ensemble des fonctions de L^2 dont la dérivée faible est dans L^2 — qui est mentionné[2] dans la section « Espace de HILBERT »[3]. De très nombreux ouvrages de référence adoptent cette vision sans s'attarder sur de longs développements de théorie générale des distributions. De même pour la transformée de FOURIER on pose $\widehat{T}(\phi) = T(\widehat{\phi})$, relation bien définie grâce à stabilité de $\mathscr{S}$ par transformée de FOURIER. Appréhender ces manipulations sur les exemples de base suggérés dans le programme permet déjà de pouvoir aborder des problèmes dignes d'intérêt.

2. Il n'est pas question toutefois d'attendre d'un candidat à l'agrégation qu'il manifeste une quelconque connaissance de la *hiérarchie* des espaces de Sobolev.

3. qui ouvre la voie vers les approches variationnelles.

Le programme incite à explorer certaines situations concrètes qui peuvent certainement être exploitées avec profit dans plusieurs leçons (notamment 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications ; 222 : Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires ; 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications ; 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales ; 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications ; 246 : Séries de FOURIER. Exemples et applications ; 250 : Transformation de FOURIER. Applications ; 261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications...). On liste quelques exemples ci-dessous. Il ne s'agit que de pistes, données à titre indicatif et sans prétention à l'exhaustivité. Elles mettent en œuvre des techniques variées du programme d'analyse (intégration, calcul différentiel, analyse de FOURIER, analyse complexe,...). Le jury fait confiance aux candidats et aux préparateurs pour trouver d'autres exemples tout autant pertinents et dans le même esprit.

— Relier $T' = 0$ au sens faible avec le fait que T est constant ; établir que la transformée de FOURIER d'une fonction à support compact sur $\mathbb{R}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$; caractériser les distributions T vérifiant $\langle T|\varphi\rangle = 0$ pour toute fonction test φ telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$.
— Etablir que l'application $\phi \in \mathscr{S} \mapsto \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \star \phi$ se prolonge en une application linéaire continue sur L^2 dont on peut calculer la norme.
— Reconnaître les solutions élémentaires E de l'opérateur $-\Delta$ sur $\mathbb{R}^N$, établir le lien entre $E * f$ et les solutions de $-\Delta u = f$ et analyser la régularité de u pour des données dans des espaces de LEBESGUE ($f \in L^2$).
— Déterminer la transformée de FOURIER inverse de $\xi \mapsto \frac{1}{1+\xi^2}$, utiliser la transformée de FOURIER pour résoudre $u - \frac{d^2}{dx^2}u = f \in L^2(\mathbf{R})$, trouver le noyau de convolution correspondant, analyser la régularité des solutions obtenues. Dans le même ordre d'idées, on peut étudier le problème de DIRICHLET pour l'équation de POISSON posée dans le demi-espace. En domaine périodique, un calcul similaire en termes de séries de FOURIER permet aussi de trouver les solutions faibles. Il est alors possible d'établir, à l'aide du théorème d'ASCOLI, la compacité de l'opérateur résolvant $f \in L^2 \mapsto u$ dans C^0.
— Exploiter les séries de FOURIER pour résoudre le problème de DIRICHLET pour l'équation de POISSON sur un disque (noyau de POISSON) et mettre en évidence les propriétés qualitatives de la solution (régularité, principe du maximum pour les fonctions harmoniques).
— Utiliser la transformée de FOURIER pour obtenir l'expression du noyau de la chaleur $H_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-x^2/(4t)}$ et montrer que $(t,x) \mapsto H_t \star u_0(x)$ definit une solution faible du problème d'évolution pour une donnée initiale u_0 dans L^2 ou dans L^1 ; analyser la régularité de cette solution et le comportement quand $t \to 0$ pour préciser le sens de la donnée initiale. Les mêmes questions peuvent être abordées dans le cadre périodique *via* les séries de FOURIER.
— Définir et analyser les solutions faibles de l'équation de transport (vitesse constante ou variable) pour une donnée initiale dans des espaces L^p. Une fraction des candidats saura probablement motiver cette étude en évoquant certains comportements de l'équation de BURGERS (bien que de telles équations non linéaires ne soient pas au programme et ne sauraient constituer un attendu). Etablir la convergence des solutions de l'équation $\partial_t u_\epsilon + c\partial_x u_\epsilon - \epsilon\partial^2_{xx}u_\epsilon = 0$ vers celles du transport libre $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ dans le régime de « viscosité évanescente » $\epsilon \to 0$, préoccupation qui peut être reliée à des enjeux numériques.
— Justifier la formule de D'ALEMBERT pour l'équation des ondes en dimension 1 et analyser cette formule pour des données qui ne sont pas de classe C^2. Il est important de bien appréhender les différences de comportement qualitatif avec l'équation de la chaleur (propagation à vitesse finie, régularisation instantanée).
— La formule sommatoire de POISSON joue un rôle important en théorie du signal. Elle constitue un élément central de la démonstration du théorème de SHANNON (reconstruction d'un signal dont la transformée de FOURIER est à support compact) qui peut conduire ensuite à analyser les oscillations de GIBBS, la conception de filtres, les sommes de séries trigonométriques et leur

vitesse de convergence, *etc.* voire évoquer les techniques liées à la « transformation en z » dont on peut faire ressortir la filiation avec la transformée de LAPLACE.

Il est tout à fait possible de démontrer cette formule directement avec des outils standard d'analyse de FOURIER (et les mêmes idées de base permettent de démontrer le théorème d'échantillonnage de SHANNON, même si pour la démonstration de ce dernier on fera attention aux interversions de limites dans le cas d'hypothèses de régularité plus faibles). Mais les candidats plus à l'aise avec la théorie des distributions pourront déduire la formule de POISSON d'un calcul direct de la transformée de FOURIER du peigne de DIRAC. En faisant toujours attention aux conditions d'interversions de limites on pourra alors répondre aux questions suivantes, naturelles en traitement du signal :

— avec f une fonction L^1, T un paramètre positif, et f_T la fonction égale à f sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et qui vaut 0 ailleurs, vers quoi et en quel sens converge la série de FOURIER de f_T lorsque $T \to +\infty$? De même si g est une fonction périodique suffisamment régulière, vers quoi et en quel sens converge la transformée de FOURIER de $x \mapsto w_t(x)g(x)$ quand $t \to +\infty$ avec w_t par exemple la gaussienne $x \mapsto e^{-x^2/(2t)}$?

— a-t-on une représentation fréquentielle, et en quel sens, du produit non périodique de deux fonctions périodiques comme $x \mapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi(x - nT_1) \sin\left(\frac{2\pi x}{T_2}\right)$ avec ψ dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ (par exemple dans le cas où ψ est une fonction gaussienne, ce qui sert à la modélisation de certains sons pulsés) ?

Pour aller plus loin, on pourra prolonger et généraliser la formule de POISSON au cas où on a une distribution tempérée dont la transformée de FOURIER est une distribution à support compact, à la place d'une fonction de l'espace de SCHWARTZ. Il faut bien sûr se sentir assez solide pour manipuler les distributions à support compact et les convolutions dans ce cadre. Les conséquences sur les stratégies d'échantillonnage pour des classes de fonctions continues pour lesquelles le théorème de SHANNON ne s'applique pas (par exemple la somme d'une sinusoïde et d'une fonction dont la transformée de FOURIER est L^2 à support compact) pourront alors être expliquées.

Enfin à l'aide des distributions et de l'analyse de FOURIER on pourra justifier le fait que l'on peut définir la transformée de FOURIER à temps discret d'un signal numérique $x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ comme une fonction $\hat{x}$ T-périodique où T est *a priori* arbitraire, mais dont on donnera une interprétation pratique (éventuellement en supposant que la suite x est dans $\ell^1(\mathbf{Z})$). On peut ensuite considérer l'application $x \mapsto \hat{x}$ et donner ses propriétés. On pensera à des illustrations comme celle de la gaussienne discrétisée $x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} = (e^{-n^2/(2\sigma^2)})_{n\in\mathbf{Z}}$.

Évolution du programme d'informatique (Option D)

Le programme spécifique de l'option D évolue aussi pour la session 2018. Il comporte quatre parties :

— Algorithmique fondamentale,
— Calculabilité, décidabilité et complexité,
— Logique et démonstration,
— Théorie des langages de programmation.

Les ajouts majeurs concernent le lambda-calcul et les notions de sémantique opérationnelle et dénotationnelle, qui ont donné lieu chacun à une nouvelle leçon. Dans les deux cas, seules les notions de base sont au programme. La notion de chaîne de compilation et quelques notions élémentaires d'analyse sémantique ont également été introduites. S'il n'y a pas de leçon spécifique sur le sujet, les connaissances correspondantes pourront être utilisées pour compléter ou illustrer certaines leçons ou lors de l'épreuve de modélisation. La réécriture n'est plus au programme ; la partie « Automates et langages » du programme 2017 a été allégée avec, par exemple, le retrait de la notion d'automates à pile et est incluse dans « Théorie des langages de programmation ». L'évolution sera poursuivie en 2019, en particulier pour intégrer des notions de théorie de bases de données.

Annexe B

Liste des leçons d'oral qui seront proposées en 2018

B.1 Lecons d'algèbre et géométrie

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

103 Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

122 Anneaux principaux. Applications.

123 Corps finis. Applications.

125 Extensions de corps. Exemples et applications.

126 Exemples d'équations diophantiennes.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications

144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

B.2 Lecons d'analyse et probabilités

201 Espaces de fonctions. Exemples et applications.

202 Exemples de parties denses et applications.

203 Utilisation de la notion de compacité.

204 Connexité. Exemples et applications.

205 Espaces complets. Exemples et applications.

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Applications des formules de TAYLOR.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

B.3 Leçons de mathématiques pour l'informatique (option D)

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

218 Applications des formules de Taylor.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

246 Séries de FOURIER. Exemples et applications.

250 Transformation de FOURIER. Applications.

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

B.4 Leçons d'informatique fondamentale (option D)

901 Structures de données. Exemples et applications.

902 Diviser pour régner. Exemples et applications.

903 Exemples d'algorithmes de tri. Correction et complexité.

906 Programmation dynamique. Exemples et applications.

907 Algorithmique du texte. Exemples et applications.

909 Langages rationnels et automates finis. Exemples et applications.

912 Fonctions récursives primitives et non primitives. Exemples.

913 Machines de TURING. Applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

915 Classes de complexité. Exemples.

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre. Exemples.

921 Algorithmes de recherche et structures de données associées.

923 Analyses lexicale et syntaxique. Applications.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

925 Graphes : représentations et algorithmes.

926 Analyse des algorithmes, complexité. Exemples.

927 Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.

928 Problèmes NP-complets : exemples et réduction.

929 Lambda-calcul pur comme modèle de calcul. Exemples.

930 Sémantique des langages de programmation. Exemples.

B.5 Sélection de leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs

104 Groupes finis. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Exemples.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

110 Structure et dualité des groupes abéliens finis. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

182 Applications des nombres complexes à la géométrie.

183 Utilisation des groupes en géométrie.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

234 Espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Annexe C

La bibliothèque de l'agrégation

ABELSON H. **SUSSMAN G. J.** **SUSSMAN J.**	Structure and interpretation of computer programs	MIT PRESS
AEBISCHER B.	L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique	VUIBERT
AEBISCHER B.	L3 Géometrie	VUIBERT
AHUÉS M. **CHATELIN F.**	Exercices de valeurs propres de matrices	MASSON
ALBERT L. **Collectif**	Cours et exercices d'informatique	VUIBERT
ALDON G.	Mathématiques dynamiques	HACHETTE
ALESSANDRI M.	Thèmes de géométrie	DUNOD
ALLAIRE G.	Analyse numérique et optimisation	EDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ALLANO-CHEVALIER M. **OUDOT X.**	Analyse et géométrie différentielle	HACHETTE
ALLOUCHE J. P. **SHALLIT J.**	Automatic sequences theory, applications, generalizations	CAMBRIDGE
AMAR E. **MATHERON É.**	Analyse complexe	CASSINI

ANDLER M. **BLOCH J. D.** **MAILLARD B.**	Exercices corrigés de Mathématiques — Tome 1A - Topologie — Tome 1B - Fonctions numériques — Tome 2 - Suites et séries numériques — Tome 3 - Analyse fonctionnelle — Tome 5 - Algèbre générale, polynômes — Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie — Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie	Ellipses
ANDREWS G.	Number Theory	Dover
APPLE A.W.	Modern compiler implementation — in C — in Java — in ML	Cambrigde
ARIBAUD F. **VAUTHIER J.**	Mathématiques. Première année de DEUG	ESKA
ARNAUDIÈS J-M. **BERTIN J.**	Groupes, Algèbres et Géométrie — Tome I — Tome II	Ellipses
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'analyse	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **DELEZOIDE P.** **FRAYSSE H.**	Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de Mathématiques tome 4	Dunod
ARNAUDIÈS J-M. **FRAYSSE H.**	Cours de Mathématiques — 1. Algèbre — 2. Analyse — 3. Compléments d'analyse — 4. Algèbre bilinéaire et géométrie	Dunod
ARNAUDIÈS J.-M. **LELONG-FERRAND J.**	Cours de Mathématiques — Tome 1 pour M-M' : Algèbre — Tome 1 pour A-A' : Algèbre — Tome 2 : Analyse — Tome 3 : Géométrie et cinématique — Tome 4 : Equations différentielles, intégrales multiples	Dunod
ARNOLD V.	Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires	MIR

ARNOLD V.	Équations différentielles ordinaires	MIR
ARNOLD V.	Lectures on partial differential equations	Springer
ARNOLD A. **GUESSARIAN I.**	Mathématiques pour l'informatique	EdiSciences
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gauthier-Villars
ARTIN E.	Algèbre géométrique	Gabay
ARTIN M.	Algebra	Prentice Hall
AUBIN J.P.	Analyse fonctionnelle appliquée — Tome 1 — Tome 2	PUF
AUDIN M.	Géométrie de la licence à l'agrégation	Belin
AUTEBERT J. M.	Calculabilité et décidabilité	Masson
AUTEBERT J. M.	Théorie des langages et des automates	Masson
AVANISSIAN V.	Initiation à l'analyse fonctionnelle	PUF
AVEZ A.	Calcul différentiel	Masson
AVEZ A.	La leçon d'analyse à l'oral de l'agrégation	Masson
BAASE S. **VAN GELDER A.**	Computer algorithms Introduction to design & analysis	Addison Wesley
BACAER N.	Histoires de mathématiques et de populations	Cassini

BADOUEL E. **BOUCHERON S.** **DICKY A., PETIT A.** **SANTHA M., WEIL P., ZEITOUN M.**	Problèmes d'informatique fondamentale	Springer
BAJARD J.C.	Exercices d'Algorithmique	ITP
BAKHVALOV N.	Méthodes numériques	MIR
BARANGER J.	Analyse numérique	Hermann
BARBE Ph. **LEDOUX M.**	Probabilité (De la licence à l'agrégation)	Belin
BARRET M. **BENIDIR M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BASILI B. **PESKINE C.**	Algèbre	Diderot, éditeur Arts et Sciences
BASS J.	Cours de Mathématiques — Tome 1 — Tome 2	Masson
BAUER F. L.	Decrypted secrets. Methods and maxims of cryptology	Springer
BECK V. **MALICK J.** **PEYRÉ G.**	Objectif Agregation	HK
BENAÏM M. **EL KAROUI N.**	Promenade aléatoire	Les éditions de l'X
BENDER C. **ORSZAG S.**	Advanced mathematical methods for scientists and engineers	Mc Graw Hill
BENIDIR M. **BARRET M.**	Stabilité des filtres et des systèmes linéaires	Dunod
BENOIST J. *et al*	Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés	Pearson Education

BENOIST J. **SALINIER A.**	Exercices de calcul intégral	Dunod
BENZONI-GAVAGE S.	Calcul différentiel et équations différentielles	Dunod
BERCU B. **CHAFAÏ D.**	Modélisation stochastique et simulation	Dunod
BERGER M.	Géométrie — Index — 1. Action de groupes, espaces affines et projectifs — 2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères — 3. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes — 4. Formes quadratiques, quadriques et coniques — 5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères	Cédic/Nathan
BERGER M.	Géométrie tome 2	Nathan
BERGER M.	Géométrie vivante	Cassini
BERGER M. **BERRY J-P.** **PANSU P.** **SAINT RAYMOND X.**	Problèmes de géométrie commentés et rédigés	Cédic/Nathan
BERGER M. **GOSTIAUX B.**	Géométrie différentielle	Armand Colin
BERLINE N. **SABBAH C.**	Groupes finis, journées X-UPS 2000	Editions de l'X
BERTHELIN F.	Equations différentielles	Cassini
BHATIA R.	Matrix Analysis	Springer
BICKEL P.J. **DOKSUM K.A.**	Mathematical statistics	Prentice Hall

BIDÉGARAY B. **MOISAN L.**	Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation	Springer
BIGGS N. L.	Discrete mathematics	Oxford Science Publications
BINET G.	Traitement du signal	Ellipse
BILLINGSLEY P.	Probability and measure	Wiley
BLANCHARD A.	Les corps non commutatifs	PUF
BOAS R.	A primer of real functions	Mathematical association of America
BOISSONAT J.-D. **YVINEC M.**	Géométrie algébrique	Ediscience
BON J.L.	Fiabilité des systèmes	Masson
BONNANS J.F. **GILBERT J.C.** **LEMARÉCHAL C.** **SAGASTIZABAL C.** **PENNEQUIN D.**	Optimisation numérique	Springer
BONY J.M.	Cours d'analyse	Editions de l'école polytechnique
BONY J.M.	Méthodes mathématiques pour les sciences physiques	Editions de l'école polytechnique
BORIES-LONGUET F.	Graphes et combinatoire	Ellipse
BOUALEM H. **BROUZET J.C.** **ELSNER B.** **KACZMAREK L.**	Mathématique L1	Pearson Education

BOURBAKI N.	Éléments de Mathématique — Topologie générale, chapitres V à X — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII — Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III — Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV	Hermann
BOURGADE P.	Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005	Cassini
BOUVIER A. **RICHARD D.**	Groupes	Hermann
BRAEMER J-M. **KERBRAT Y.**	Géométrie des courbes et des surfaces	Hermann
BRÉMAUD P.	Introduction aux probabilités	Springer
BRÉZIS H.	Analyse fonctionnelle, théorie et applications	Masson
BRIANE M. **PAGÈS G.**	Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition	Vuibert
BROUSSE P.	Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'.	Armand Colin
BRUCE J.W. **GIBLIN P.J.** **RIPPON P.J.**	Microcomputers and Mathematics	Cambridge
CABANE R. **LEBOEUF C.**	Algèbre linéaire — 1. Espaces vectoriels , Polynômes — 2. Matrices et réduction	Ellipses
CABANNES H.	Cours de Mécanique générale	Dunod
CALAIS J.	Éléments de théorie des anneaux	PUF
CALAIS J.	Éléments de théorie des groupes	PUF

CALDERO P. **GERMONI J.**	Histoires hédonistes de groupes et de géométries	Calvage et Mounet
CALVO B.	Cours d'analyse II	Armand Colin
CANDELPERGHER B.	Calcul intégral	Cassini
CANDELPERGHER B.	Théorie des probabilités	Calvage et Mounet
CARREGA J.C.	Théorie des corps	Hermann
CARTAN H.	Calcul différentiel (1971)	Hermann
CARTAN H.	Cours de calcul différentiel (1977)	Hermann
CARTAN H.	Formes différentielles	Hermann
CARTAN H.	Théorie élémentaire des fonctions analytiques	Hermann
CARTON O.	Langages formels, calculabilité et complexité	Vuibert
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics I	Wiley Interscience
CASTI J.L.	Realty Rules : Picturing the world in mathematics II	Wiley Interscience
CASTLEMAN K.R.	Digital image processing	Prentice Hall
CHABANOL M.-L. **RUCH J.-J.**	Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques	Ellipse
CHABAT B.	Introduction à l'analyse complexe	Mir
CHAFAÏ D.	Probabilités. Préparation à l'agrégation interne	

CHAMBERT-LOIR A.	Algèbre corporelle	Editions de l'X
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation — Analyse 2 — Analyse 3	Masson
CHAMBERT-LOIR A. **FERMIGER S.** **MAILLOT V.**	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée)	Masson
CHARLES J. **MBEKHTA M.** **QUEFFÉLEC H.**	Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs	Dunod
CHARPENTIER E. **NIKOLSKI N.**	Leçons de mathématiques d'aujourd'hui — Vol 1 — Vol 2 — Vol 3 — Vol 4	Ellipses
CHATELIN F.	Valeurs propres de matrices	Masson
CHILDS L.	A concrete introduction to Higher Algebra	Springer Verlag
CHOIMET D. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse mathématique	Cassini
CHOQUET G.	Cours d'analyse Tome II : Topologie	Masson
CHOQUET G.	L'enseignement de la géométrie	Hermann
CHOQUET-BRUHAT Y.	Distributions. Théories et problèmes.	Masson
CHRISTOL G. **PILIBOSSIAN P.** **YAMMINE S.**	— Algèbre 1 — Algèbre 2	Ellipses
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Masson
CIARLET P.G.	Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation	Dunod

COGIS O. **ROBERT C.**	Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes	Vuibert
COHN P.M.	Algebra Volume 1	John Wiley
COLLET H. **GIRARD B.** **PERRIER C.**	Mathématique BTS industriel	Nathan
COLLET P.	Modeling binary data	Chapman and Hall
COLMEZ P.	Éléments d'algèbre et d'analyse	Editions de l'X
COMBROUZE A.	Probabilités et statistiques	PUF
CORI R. **LASCAR D.**	Logique mathématique — 1. Calcul propositionnel, algèbre de Boole, calcul des prédicats — 2. Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles	Dunod
CORMEN T. H. **LEISERSON C. E.** **RIVEST R. L.** **STEIN C.**	Introduction à l'algorithmique	Dunod
CORTELLA A.	Théorie des groupes	Vuibert
COTRELL M. **GENON-CATALOT V.** **DUHAMEL C.** **MEYRE T.**	Exercices de probabilités	Cassini
COURANT R. **HILBERT D.**	Methods of Mathematical Physics — Volume 1 — Volume 2	John Wiley
COUSINEAU G. **MAUNY M.**	Approche fonctionnelle de la programmation	Ediscience
COX D.A.	Galois Theory	Wiley Interscience

COXETER H.S.M.	Introduction to Geometry	John Wiley
CVITANOVIĆ P.	Universality in Chaos	Institute of Physics Publishing
DACUNHA-CASTELLE D. **DUFLO M.**	— Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe — Exercices de Probabilités et Statistiques 1. Problèmes à temps fixe	Masson
DACUNHA-CASTELLE D. **REVUZ D.** **SCHREIBER M.**	Recueil de problèmes de calcul des probabilités	Masson
DAMPHOUSSE P.	Petite introduction à l'algorithmique	ELLIPSES
DANTZER J.F.	Mathématiques pour l'agrégation interne	Vuibert
DARTE A. **VAUDENAY S.**	Algorithmique et optimisation	Dunod
DAVID R. **NOUR K.** **RAFFALI C.**	Introduction à la logique Théorie de la démonstration	Dunod
DEHEUVELS P.	L'intégrale	PUF
DEHEUVELS R.	Formes quadratiques et groupes classiques	PUF
DEHORNOY P.	Mathématiques de l'informatique	Dunod
DEHORNOY P.	Complexité et décidabilité	Springer
DELCOURT J.	Théorie des groupes	Dunod
DELTHEIL R. **CAIRE D.**	Géométrie et compléments	Jacques Gabay
DEMAILLY J.P.	Analyse numérique et équations différentielles	PU Grenoble

DEMAZURE M.	Catastrophes et bifurcations	Ellipses
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes	Cassini
DEMAZURE M.	Cours d'algèbre	Cassini
DEMBO A. **ZEITOUNI O.**	Large deviations techniques and applications	Springer
DESCHAMPS C. **WARUSFEL A.** *et al.*	Mathématiques, cours et exercices corrigés — 1ère année MPSI, PCSI, PTSI — 2ème année MP, PC, PSI	Dunod
DESCOMBES R.	Éléments de théorie des nombres	PUF
DESPRÉS B.	Lois de conservations euleriennes, lagrangiennes et méthodes numériques	Springer
DEVANZ C. **ELHODAIBI M.**	Exercices corrigés de Mathématiques posés à l'oral des Ensi, Tome 2	Ellipses
DI MENZA L.	Analyse numérique des équations aux dérivées partielles	Cassini
DIEUDONNÉ J.	Algèbre linéaire et géométrie élémentaire	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Calcul infinitésimal	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Sur les groupes classiques	Hermann
DIEUDONNÉ J.	Éléments d'Analyse. — Fondements de l'analyse moderne — Éléments d'Analyse Tome 2.	Gauthier-Villars
DIXMIER J.	Cours de Mathématiques du premier cycle — Première année — Deuxième année	Gauthier-Villars
DOWEK G. **LÉVY J.-J**	Introduction à la théorie des langages de programmation	Editions de l'X

DRAPPER N. **SCHMITH H.**	Applied regression analysis	Wiley
DUBUC S.	Géométrie plane	PUF
DUCROCQ A. **WARUSFEL A.**	Les Mathématiques, plaisir et nécessité Un parcours guidé dans l'univers des mathématiques	Vuibert
DUGAC P.	Histoire de l'analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages	Vuibert
DUTERTRET G.	Initiation à la cryptographie	PUF
DYM H. **McKEAN H.P.**	Fouriers series and integrals	Academics Press
EBBINGHAUS H. *et al.*	Les Nombres	Vuibert
EIDEN J.D.	Géométrie analytique classique	Calvage et Mounet
EL KACIMI ALAOUI A. **QUEFFÉLEC H.** **SACRÉ C.** **VASSALLO V.**	Quelques aspects des mathématiques actuelles	Ellipses
ENGEL A.	Solutions d'expert — Vol 1 — Vol 2	Cassini
ÉPISTEMON L. **(OVAERT J.L.** **VERLEY J.L.)**	Exercices et problèmes — Analyse. Volume 1 — Algèbre.	Cédic/Nathan
EXBRAYAT J.M. **MAZET P.**	Notions modernes de mathématiques — Algèbre 1 : Notions fondamentales de la théorie des ensembles — Analyse 1 : Construction des espaces fondamentaux de l'analyse — Analyse 2 : Éléments de topologie générale	Hatier
FADDEEV D. **SOMINSKI I.**	Recueil d'exercices d'Algèbre Supérieure	MIR

FAIRBANK X. **BEEF C.**	POX - Exercices posés au petit oral de l'X	Ellipses
FARAUT J.	Analyse sur les groupes de Lie	Calvage et Mounet
FARAUT J. **KHALILI E.**	Arithmétique Cours, Exercices et Travaux Pratiques sur Micro-Ordinateur	Ellipses
FELLER W.	An introduction to probability theory and its applications — Volume 1 — Volume 2	John Wiley
FERRIER J.P.	Mathématiques pour la licence	Masson
FILBET F.	Analyse numérique	Dunod
FLORY G.	Exercices de topologie et analyse avec solutions — Tome 1 - Topologie — Tome 2 - Fonctions d'une variable réelle — Tome 3 - Fonctions différentiables, intégrales multiples — Tome 4 - Séries, équations différentielles	Vuibert
FONTANEZ F. **RANDÉ B.**	Les clefs pour les Mines	Calvage et Mounet
FRANCHINI J. **JACQUENS J-C.**	Mathématiques Spéciales — Algèbre — Analyse 1 — Analyse 2	Ellipses
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Algèbre 3	Cassini

FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 1	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 2	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.** **NICOLAS S.**	Exercices de mathématiques Oraux X-ens Analyse 3	Cassini
FRANCINOU S. **GIANELLA H.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 1	Masson
FRENKEL J.	Géométrie pour l'élève-professeur	Hermann
FRESNEL J.	Géométrie algébrique	UFR Maths Bordeaux
FRESNEL J.	Géométrie	IREM de Bordeaux
FRESNEL J.	Groupes	Hermann
FRESNEL J.	Méthodes modernes en géométrie	Hermann
FRESNEL J. **MATIGNON M.**	Algèbre et géométrie	Hermann
FUHRMANN P.	A polynomial approach to linear algebra	Springer
FULTON W.	Algebraic Topology A first course	Springer
GABRIEL P.	Matrices, géométrie, algèbre linéaire	Cassini
GANTMACHER F.R.	Théorie des matrices — Tome 1 — Tome 2	Dunod
GARET O.	Probabilités et processus stochastiques	Copyrighted material

GARET O. **KURTZMANN A.**	De l'intégration aux probabilités	Ellipses
GAREY M. **JOHNSON D.**	Computers and intractability	Freeman
GARLING D.J.H.	Inequalities : a journey into linear analysis	Cambridge
GATHEN (von zur) J. **GERHARD .J**	Modern computer algebra	Cambridge University press
GENET J.	Mesure et intégration. Théorie élémentaire. Cours et exercices résolus	Vuibert
GHIDAGLIA J.M.	Petits problèmes d'analyse	Springer
GINDIKIN S.	Histoires de mathématiciens et de physiciens	Cassini
GOBLOT R.	Algèbre commutative	Masson
GOBLOT R.	Thèmes de géométrie	Masson
GODEMENT R.	Analyse — Tome 1 — Tome 2 — Tome 3	Springer
GODEMENT R.	Cours d'Algèbre	Hermann
GOLUB G.H. **VAN LOAN C.F.**	Matrix computations	Wiley
GONNORD S. **TOSEL N.**	Thèmes d'Analyse pour l'agrégation — Topologie et Analyse fonctionnelle — Calcul différentiel	Ellipses
GOSTIAUX B.	Cours de mathématiques spéciales — Tome 1 - Algèbre — Tome 2 - Topologie et analyse réelle — Tome 3 - Analyse fonctionnelle et calcul différentiel — Tome 4 - Géométrie affine et métrique — Tome 5 - Géométrie : arcs et nappes	PUF

GOUDON T.	Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique	Iste
GOUDON T.	Intégration	Ellipses
GOURDON X.	Les maths en tête, mathématiques pour M' — Algèbre — Analyse	Ellipses
GRAHAM R. **KNUTH D.** **PATASHNIK O.**	Concrete mathematics	Adison-Wesley
GRAMAIN A.	Géométrie élémentaire	Hermann
GRAMAIN A.	Intégration	Hermann
GRANJON Y.	Informatique, algorithmes en pascal et en C	Dunod
GRENIER J.P.	Débuter en algorithmique avec Matlab et Scilab	Ellipses
GREUB W.	Linear Algebra	Springer Verlag
GRIFONE J.	Algèbre linéaire	Cepadues
GRIMMET G. **WELSH D.**	Probability (an introduction)	Oxford
GUJARATI D. N.	Basic Econometrics	Wiley
GUSFIELD D.	Algorithms on strings, trees and sequences	Cambridge university press
HABSIEGER L. **MARTEL V.**	Exercices corrigés posés à l'oral des ENSI Tome 1 Analyse	Ellipses
HALMOS P.	Problèmes de mathématiciens petits et grands	Cassini

HAMMAD P.	Cours de probabilités	Cujas
HAMMAD P. **TARANCO A.**	Exercices de probabilités	Cujas
HAMMER R. **HOCKS M.** **KULISH U.** **RATZ D.**	C++ toolbox for verified computing	Springer
HARDY G.H. **WRIGHT E.M.**	An introduction to the theory of numbers	Oxford
HAREL D.	Computer LTD. What they really can't do	Oxford
HAREL D. **FELDMAN Y.**	Algorithmics. The spirit of computing	Addison Wesley
HENNEQUIN P.L. **TORTRAT A.**	Théorie des probabilités et quelques applications	Masson
HENRICI P.	Applied and Computational Complex Analysis — Volume 1 — Volume 2 — Volume 3	Wiley-Interscience
HERVÉ M.	Les fonctions analytiques	PUF
HINDRY M.	Arithmétique	Calvage et Mounet
HIRSCH F. **LACOMBE G.**	Eléments d'analyse fonctionnelle	Masson
HOCHART M. **SCIUTO G.**	Algèbre Analyse Géométrie (MPSI/PCSI)	Vuibert
HOPCROFT J.E. **MOTWANI R.** **ULLMAN J. D.**	Introduction to automata theory, Languages and Computation	Addison Wesley
HOUZEL C.	Analyse mathématique : cours et exercices	Belin
HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T1	Vuibert

HUBBARD J. **HUBERT F.**	Calcul scientifique T2	Vuibert
INGRAO B.	Coniques projectives, affines et métriques	Calvage et Mounet
IRELAND K. **ROSEN M.**	A Classical Introduction to Modern Numbers Theory	Springer Verlag
ISAAC R.	Une initiation aux probabilités (Trad. R. Mansuy)	Vuibert-Springer
ITARD J.	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
JACOBSON N.	Basic Algebra — Tome I — Tome II	Freeman and Co
JACOD J. **PROTTER P.**	L'essentiel en théorie des probabilités	Cassini
KAHANE J.P. **GILLES P.**	Séries de Fourier et ondelettes	Cassini
KATZNELSON Y.	An Introduction to Harmonic Analysis	Dover
KERNIGHAN B. **RITCHIE D.**	Le langage C	Dunod
KLOECKNER B.	Un bref aperçu de la géométrie projective	Calvage et Mounet
KNUTH D.E.	The art of computer programming — Volume 1 : Fundamental algorithms — Volume 2 : Seminumerical algorithms — Volume 3 : Sorting and Searching	Addison-Wesley
KOBLITZ N.	A course in number theory and cryptography	Springer
KOLMOGOROV A. **FOMINE S.**	Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle	Ellipses
de KONNINCK J.M. **MERCIER A.**	Introduction à la théorie des nombres	Modulo

KÖRNER T.W.	Fourier analysis	Cambridge
KÖRNER T.W.	Exercises for Fourier analysis	Cambridge
KOURIS E.	Une année de colle en maths en MPSI	Calvage et Mounet
KREE P.	Introduction aux Mathématiques et à leurs applications fondamentales M.P.2	Dunod
KRIVINE H.	Exercices de Mathématiques pour physiciens	Casssini
KRIVINE J.L.	Théorie axiomatique des ensembles	PUF
KRIVINE J.L.	Théorie des ensembles	Cassini
KUNG J.P.S. **ROTA G-C.** **YAN C.H.**	Combinatorics : the Rota way	Cambridge
LAAMRI E. H.	Mesures, intégration et transformée de Fourier des fonctions	Dunod
LACOMME P. **PRINS C.** **SEVAUX M.**	Algorithmes de graphes	Eyrolles
LACROIX Y. **MAZLIAK L.**	Probabilités, variables aléatoires...Niveau M1	Ellipses
LADEGAILLERIE Y.	Géométrie affine, projective, euclidienne et analagmatique	PUF
LAFONTAINE J.	Introduction aux variétés différentielles	PUF
LALEMENT R.	Logique, réduction, résolution	Masson
LANG S.	Algèbre linéaire — Tome 1 — Tome 2	InterEditions

LANG S.	Algebra	Addison-Wesley
LANG S.	Linear Algebra	Addison-Wesley
LAROCHE F.	Escapades arithmétiques	Ellipses
LASCAR D.	La théorie des modèles en peu de maux	Cassini
LASCAUX T. **THÉODOR R.**	Analyse matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tomes 1 & 2	Dunod
LAVILLE G.	Courbes et surfaces	Ellipses
LAVILLE G.	Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses
LAX P. D.	Functional analysis	Wiley
LAX P. D.	Linear Algebra	Wiley
LE BRIS G.	Maple Sugar : une initiation progressive à Maple	Cassini
LEBOEUF C. **GUÉGAND J.** **ROQUE J.L.** **LANDRY P.**	Exercices corrigés de probabilités	Ellipses
LEBORGNE D.	Calcul différentiel et géométrie	PUF
LEBOSSÉ C. **HÉMERY C.**	Géométrie. Classe de Mathématiques	Jacques Gabay
LEHMANN D. **SACRÉ C.**	Géométrie et topologie des surfaces	PUF
LEHNING H. **JAKUBOWICZ D.**	Mathématiques supérieures et spéciales 2 : Dérivation	Masson

LEHNING H.	Mathématiques supérieures et spéciales — Tome 1 : Topologie — Tome 3 : Intégration et sommation — Tome 4 : Analyse en dimension finie — Tome 5 : Analyse fonctionnelle	Masson
LEICHTNAM E. **SCHAUER X.**	Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux X-ENS — Tome I - Algèbre 1 — Tome 2 - Algèbre et géométrie — Tome 3 - Analyse 1 — Tome 4 - Analyse 2	Ellipses
LELONG-FERRAND J.	Géométrie différentielle	Masson
LELONG-FERRAND J.	Les fondements de la géométrie	PUF
LESIEUR L. **MEYER Y.** **JOULAIN C.** **LEFEBVRE J.**	Algèbre linéaire, géométrie	Armand Colin
LINET F.	Maths en pratiques	Dunot
LION G.	Algèbre pour la licence Cours et exercices (2ème édition)	Vuibert
LION G.	Géométrie du plan Cours complet avec 600 exercices résolus	Vuibert
LOTHAIRE M.	Algebraic combinatorics on words	Cambridge
MAC LANE S. **BIRKHOFF G.**	Algèbre — 1 : Structures fondamentales — 2 : Les grands théorèmes	Gauthier-Villars
MACKI J. **STRAUSS A.**	Introduction to optimal control theory	Springer
MADÈRE K.	Leçons d'analyse	Ellipse
MADÈRE K.	Leçons d'algèbre	Ellipse

MAKAROV B.M. **GOLUZINA M.G.** **LODKIN A.A.** **PODKORYTOV A.N.**	Problèmes d'analyse réelle	Cassini
MALLIAVIN M. P.	Les groupes finis et leurs représentations complexes	Masson
MALLIAVIN P.	Géométrie différentielle intrinsèque	Hermann
MALLIAVIN M. P. **WARUSFEL A.**	Algèbre linéaire et géométrie classique. Exercices	Masson
MANIVEL L.	Cours spécialisé	SMF
MANSUY R. **MNEIMNÉ R.**	Algèbre linéaire réduction des endomorphismes	Vuibert
MANSUY R. **RANDÉ B.**	Les clefs pour l' X	Calvage et Mounet
Manuels Matlab	— Using Matlab version 5 — Using Matlab version 6 — Statistics Toolbox — Using Matlab Graphics	
MARCE S. **DEVAL-GUILLY E.**	Problèmes corrigés des ENSI	Ellipses
MARCO J.P. *et al.*	Analyse L3	Pearson
MASCART H. **STOKA M.**	Fonctions d'une variable réelle — Tome 2 : Exercices et corrigés — Tome 3 : Exercices et corrigés — Tome 4 : Exercices et corrigés	PUF
MAURY B.	Analyse fonctionnelle, Exercices et problèmes corrigés	Ellipses
MAWHIN J.	Analyse : fondements, technique, évolutions	De Boeck Université
MAZET P.	Algèbre et géométrie pour le CAPES et l'Agrégation	Ellipses

MENEZES A.J. **van OORSCHOT P.C.** **VANSTONE S.A.**	Handbook of applied cryptography	CRC Press
MERKIN D.	Introduction to the theory of stability	Springer
MÉTIVIER M.	Notions fondamentales de la théorie des probabilités	Dunod
MÉTIVIER M.	Probabilités : dix leçons d'introduction. École Polytechnique	Ellipses
MEUNIER P.	Agrégation interne de Mathématiques Exercices d'oral corrigés et commentés — Tome 2	PUF
MEUNIER P.	Algèbre avec applications à l'algorithmique et à la cryptographie	Ellipses
MEYRE T.	Préparation à l'agrégation interne	IREM
MIGNOTTE M.	Algèbre concrète, cours et exercices	Ellipses
MIGNOTTE M.	Mathématiques pour le calcul formel	PUF
MILHAU X.	Statistique	Belin
MITCHELL J. C.	Concepts in programming languages	Cambridge
MNEIMNÉ R.	Eléments de géométrie : action de groupes	Cassini
MNEIMNÉ R.	Réduction des endomorphismes	Calvage et Mounet
MNEIMNÉ R. **TESTARD F.**	Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques	Hermann
MOISAN J. **VERNOTTE A.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : topologie et séries	Ellipses

MOISAN J. **VERNOTTE A.** **TOSEL N.**	Exercices corrigés de mathématiques spéciales Analyse : suites et séries de fonctions	Ellipses
MONIER J.M.	Cours de mathématiques — Analyse 1 MPSI, PCSI, PTSI — Analyse 2 MPSI, PCSI, PTSI — Analyse 3 MP, PSI, PC, PT — Analyse 4 MP, PSI, PC, PT — Algèbre 1 MPSI, PCSI, PTSI — Algèbre 2 MP, PSI, PC, PT — Exercices d'analyse MPSI — Exercices d'analyse MP — Exercice d'algèbre et géométrie MP	Dunod
MUTAFIAN C.	Le défi algébrique — Tome 1 — Tome 2	Vuibert
NAGEL E. **NEWMAN J. R.** **GÖDEL K.** **GIRARD J. Y.**	Le théorème de Gödel	Seuil
NAUDIN P. **QUITTE C.**	Algorithmique algébrique avec exercices corrigés	Masson
NEVEU J.	Base mathématique du calcul des probabilités	Masson
NEVEU J.	Martingales à temps discret	Masson
NIVEN I.	Irrational numbers	Mathematical Association of America
NORRIS J.R.	Markov chains	Cambridge
NOURDIN Y.	Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie	Dunod
O'ROURKE J.	Computational geometry in C (second edition)	Cambridge
OPREA J.	Differential geometry	Prentice hall

OUVRARD J.Y.	— Probabilités 1 (capes, agrégation) — Probabilités 2 (maîtrise, agrégation)	Cassini
PABION J.F.	Elemenents d'analyse complexe	Ellipse
PAPADIMITRIOU C.H.	Computational complexity	Pearson Education
PAGÈS G. **BOUZITAT C.**	En passant par hasard ... Les probabilités de tous les jours	Vuibert
PAPINI O. **WOLFMANN J.**	Algèbre discrète et codes correcteurs	Springer
PARDOUX E.	Processus de Markov et applications	Dunod
PEDOE D.	Geometry- A comprehensive course	Dover
PERKO L.	Differential equation and dynamical systems	Springer
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	Ellipses
PERRIN D.	Cours d'Algèbre	ENSJF
PERRIN D.	Mathématiques d'école	Cassini
PERRIN D.	Nombres, mesures et géométrie	Ellipse
PERRIN-RIOU B.	Algèbre, arithmétique et MAPLE	Cassini
PETAZZONI B.	Seize problèmes d'informatique	Springer
PETROVŠEK M. **WILF H.S.** **ZEILBERGER D.**	A=B	A.K. Peters
PEVZNER P.	Computational molecular biology- an algorithmic approach	MIT press

PEYRÉ G.	L'algèbre discrète de la transformée de Fourier	Ellipse
PÓLYA G. **SZEGŐ G.**	Problems and Theorems in Analysis — Volume I — Volume II	Springer Verlag
POMMELLET A.	Agrégation de Mathématiques. Cours d'Analyse	Ellipses
POUNDSTONE W.	Le dilemme du prisonnier	Cassini
PRASOLOV V.	Polynomials	Springer
PRASOLOV V.	Problèmes et théorèmes d'algèbre linéaires	Cassini
PREPARATA F.P. **SHAMOS M.I.**	Computational geometry - an introduction	Springer
PRESS W. **FLANNERY B.** **TEUKOLSKI S.** **VETTERLING W.**	Numerical recipes in Pascal	Cambridge
PUTZ J.F.	Maple animation	Chapman and Hall
QUATERONI A. **SACCO R.** **SALERI F.**	Méthodes numériques	Springer
QUATERONI A. **SALERI F.** **GERVASIO P.**	Calcul scientifique	Springer
QUEFFÉLEC H.	Topologie	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Éléments d'analyse	Dunod
QUEFFÉLEC H. **ZUILY C.**	Analyse pour l'agregation	Dunod

RALSTON A. **RABINOWITCH P**	A first course in numerical analysis	INTERNATINAL STUDENT EDITION
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Cours de Mathématiques spéciales — 1- Algèbre — 2- Algèbre et applications à la géométrie — 3- Topologie et éléments d'analyse — 4- Séries et équations différentielles — 5- Applications de l'analyse à la géométrie	MASSON
RAMIS E. **DESCHAMPS C.** **ODOUX J.**	Exercices avec solutions — Algèbre — Analyse 1 — Analyse 2	MASSON
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence	DUNOD
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 1	DUNOD
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 2	DUNOD
RAMIS J.P. **WARUSFEL A.**	Mathématiques - Tout en un pour la licence Niveau 3	DUNOD
RAO C.R.	Linear statistical inference and its application	WILEY
RANDÉ B.	Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan	CASSINI
RANDÉ B. **MANSUY R.**	Les clefs pour l'X (2)	CALVAGE MOUNET
RANDÉ B. **TAIEB F.**	Les clefs pour l'X	CALVAGE MOUNET
REINHARDT F. **SOEDER H.**	Atlas des mathématiques	LIVRE DE POCHE
REMMERT R.	Classical topics in complex function theory	SPRINGER
RIDEAU F.	Exercices de calcul différentiel	HERMANN

RIESZ F. **NAGY SZ. B.**	Leçons d'analyse fonctionnelle	Gauthier-Villars
RIO E.	Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants	Springer
RIVOIRARD V. **STOLTZ G.**	Statistique mathématique en action	Dunod
ROBERT C.	Contes et décomptes de la statistique - Une initiation par l'exemple	Vuibert
ROLLAND R.	Théorie des séries 2- Séries entières	Cédic/Nathan
ROMBALDI J.E.	Thèmes pour l'agrégation de mathématiques	EDP Sciences
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUDIER H.	Alèbre linéaire. Cours et exercices	Vuibert
ROMBALDI J.E.	Analyse matricielle	EDP Sciences
ROUSSEAU Y. **SAINT-AUBIN Y.**	Mathématiques et technologie	Springer (Sumat)
ROUVIÈRE F.	Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation	Cassini
ROUX C.	Initiation à la théorie des graphes	Ellipses
RUAUD J.F. **WARUSFEL A.**	Exercices de Mathématiques Algèbre 3	Masson
RUDIN W.	Analyse réelle et complexe	Masson
RUDIN W.	Functional analysis	Mc Graw Hill
RUDIN W.	Real and complex analysis	Mc Graw Hill

SA EARP R. **TOUBIANA E.**	Introduction à la Géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann	Cassini
SAINSAULIEU L.	Calcul scientifique	Dunod
SAINT RAYMOND J.	Topologie, calcul différentiel et variable complexe	Calvage et Mounet
SAKAROVITCH J.	Eléments de théorie des automates	Vuibert
SAKS S. **ZYGMUND A.**	Fonctions analytiques	Masson
SAMUEL P.	Géométrie projective	PUF
SAMUEL P.	Théorie algébrique des nombres	Hermann
SARMANT M.C. **MERLIER T.** **PILIBOSSIAN Ph.** **YAMMINE S.**	Analyse 1	Ellipses
SAUVAGEOT F.	Petits problèmes de géométrie et d'algèbre	Springer
SAUX PICARD P.	Cours de calcul formel - Algorithmes fondamentaux	Ellipses
SAVIOZ J.C.	Algèbre linéaire, cours et exercices	Vuibert
SCHATZMAN M.	Analyse numérique, une approche mathématique	Dunod
SCHNEIER B.	Applied cryptography	Wiley
SCHWARTZ L.	Analyse — I Topologie générale et analyse fonctionnelle — II Calcul différentiel et équations différentielles	Hermann
SCHWARTZ L.	Cours d'Analyse — Tome 1 — Tome 2	Hermann

SCHWARTZ L.	Méthodes Mathématiques pour les sciences physiques	Hermann
SEDGEWICK R.	Algorithms	Addison Wesley
SEDGEWICK R.	Algorithmes en Java	Pearson Education
SEDGEWICK R.	Algorithmes en langage C	Dunod
SEGUINS PAZZIS (de) C.	Invitation aux formes quadratiques	Calvage et Mounet
SELBERHERR S. **STIPPEL H.** **STRASSER E.**	Simulation of semi-conductor devices and processes	Springer
SERRE D.	Les matrices, théorie et pratique	Dunod
SERRE J.P.	Cours d'arithmétique	PUF
SERVIEN Cl.	— Analyse 3 — Analyse 4	Ellipses
SHAPIRO H.N.	Introduction to the theory of numbers	Dover
SIDLER J.C.	Géométrie Projective	Dunod
SIPSER M.	Introduction to the theory of computation	Thomson C. T.
SKANDALIS G.	Topologie et analyse	Dunod
SKANDALIS G.	Analyse. Résumé et exercices	IREM
SKANDALIS G.	Algèbre générale et algèbre linéaire.	IREM

STANLEY R.P.	Enumerative combinatorics Volume I	Waddworth and Brooks
STEIN E.	Functional Analysis	Princeton
STEIN E.	Complex Analysis	Princeton
STEIN E.	Fourier Analysis	Princeton
STEIN E.	Real Analysis	Princeton
STEWART I.	Galois theory	Chapman and Hall
STROUSTRUP B	Le langage C++	Pearson Education
SZPIRGLAS A.	Exercices d'algèbre	Cassini
SZPIRGLAS A. *et al.*	Algèbre L3	Pearson
TAUVEL P.	Cours de Géométrie	Dunod
TAUVEL P.	Cours d'algèbre	Dunod
TAUVEL P.	Corps commutatifs et théorie de Galois	Calvage et Mounet
TAUVEL P.	Mathématiques générales pour l'agrégation	Masson
TAUVEL P.	Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 2	Masson
TAUVEL P.	Analyse complexe pour la licence	Dunod
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres T 1	S. M. F.

TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Institut Elie Cartan
TENENBAUM G.	Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres	Belin
TENENBAUM G. **MENDÈS-FRANCE M.**	Les nombres premiers	Que sais-je ? PUF
TENENBAUM G. **WU J.**	Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres T 2	S. M. F.
TESTARD F.	Analyse mathématique	Calvage et Mounet
TEYTAUD O. **ANTONINI C.** **BORGNAT P.** **CHATEAU A.** **LEBEAU E.**	Les maths pour l'agreg	Dunod
TISSERON C.	Géométries affine, projective et euclidienne	Hermann
TISSIER A.	Mathématiques générales : exercices avec solutions	Bréal
TITCHMARSH E.C.	The theory of functions	Oxford
TORTRAT A.	Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires	Masson
TRIGNAN J.	Constructions géométriques et courbes remarquables	Vuibert
TRUFFAULT B.	Exercices de géométrie élémentaires	IREM des Pays de Loire
TURING A. **GIRARD J. Y.**	La Machine de Turing	Seuil
VALIRON G.	Cours d'analyse mathématique — I Théorie des fonctions — II Équations fonctionnelles - Applications	Masson
VAUQUOIS B.	Outils Mathématiques. Probabilités	Hermann

VAUTHIER J. **PRAT J-J.**	Cours d'Analyse Mathématique de l'Agrégation	MASSON
VAZIRANI V.V.	Algorithmes d'approximation	SPRINGER
VINBERG E. B.	A course in algebra	AMS
WAGSCHAL C.	Fonctions holomorphes - Équations différentielles	HERMANN
WAGSCHAL C.	Topologie et analyse fonctionnelle	HERMANN
WAGSCHAL C.	Distributions, analyse microlocale, équations aux dérivées partielles	HERMANN
WARIN B.	L'algorithmique, votre passeport informatique pour la programmation	ELLIPSES
WARUSFEL A.	Structures algébriques finies	CLASSIQUES HACHETTE
WARUSFEL A. **ATTALI P.** **COLLET M.** **GAUTIER C.** **NICOLAS S.**	Mathématiques — Analyse — Arithmétique — Géométrie — Probabilités	VUIBERT
WATERMAN M.S.	Introduction to computational biology	CHAPMAN AND HALL / CRC
WEST D. B.	Introduction to graph theory	PRENTICE HELL
WHITTAKER E.T. **WATSON G.N.**	A course of modern analysis	CAMBRIDGE
WILF H.	Generatingfunctionology	ACADEMIC PRESS
WILF H.	Algorithms and complexity	A.K. PETERS
WILLEM M.	Analyse fonctionnelle élémentaire	CASSINI

WILLEM M.	Principes d'analyse fonctionnelle	Cassini
WINSKEL G.	The formal semantics of programming languages	MIT Press
YALE P.B.	Geometry and Symmetry	Dover
YGER A.	Analyse complexe	Ellipse
YGER A. **WEIL J.-A.** *et al.*	Matématiques appliquées L3	Pearson
YOUNG D.M. **GREGORY R.T.**	A survey of numerical mathematics	Dover
ZAVIDOVIQUE M.	Un max de math	Calvage et Mounet
ZÉMOR G.	Cours de cryptographie	Cassini
ZUILY C.	Éléments de distributions et d' équations aux dérivées partielles	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Éléments d'analyse pour l'agrégation	Masson
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Analyse pour l'agrégation	Dunod
ZUILY C. **QUEFFÉLEC H.**	Problèmes de distributions	Cassini