Agrégation interne de Mathématiques
session 1995
première composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [ag35e]

Notations :

- Pour n entier $\geqslant 1$, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$) désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).
- Si $n = p$ on écrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, ${}^tA$ désigne selon l'usage la matrice transposée de A, et $|A|$ la matrice de coefficient générique $|a_{i,j}|$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $P_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A.
- La matrice diagonale $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ sera notée $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Convention :

On identifie $\mathbb{C}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, et pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, et $x \in \mathbb{C}^p$, $(Ax)_i$ désigne le i-ième coefficient de la matrice unicolonne Ax.

Définitions :

(1). Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On écrit : $A \leqslant B$ (resp. $A < B$) si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p,\ a_{i,j} \leqslant b_{i,j} \text{ (resp. } \forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p,\ a_{i,j} < b_{i,j}).$$

(2). A est dite <u>positive</u> lorsque $[0] \leqslant A$, i.e. :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p,\ a_{i,j} \geqslant 0.$$

A est dite <u>strictement positive</u> lorsque $[0] < A$, i.e. :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p,\ a_{i,j} > 0.$$

(3). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $P_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ (i.e. les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de A sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), le réel positif $\rho(A) = \operatorname{Max}_{i \in \mathbb{N}_n} |\lambda_i|$ est appelé <u>rayon spectral</u> de A.

I

Préliminaires

1. Soient $(A, A') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^p$.

   Vérifier les assertions suivantes :

   i. $|A + A'| \leqslant |A| + |A'|$, $|AB| \leqslant |A|\,|B|$.

   ii. $|Ax| \leqslant |A|\,|x|$ et, de plus, si $0 < A$, $0 \leqslant x$ et $x \neq 0$, alors : $Ax > 0$.

   iii. Si $0 \leqslant A$ et $0 < x$, l'égalité $Ax = 0$ implique $A = 0$.

2. i. Soient z et z' des complexes tels que $|z + z'| = |z| + |z'|$, avec $z \neq 0$. Montrer que :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z' = \alpha z.$$

ii. En déduire que si $z_1, \ldots, z_n$ sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$) tels que $|z_1 + \ldots + z_n| = |z_1| + \ldots + |z_n|$, alors :

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_n, \qquad z_k = e^{i\theta}|z_k|.$$

iii. On suppose que $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $0 < \mathrm{A}$.
Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Montrer que :

$$|\mathrm{A}x| = \mathrm{A}|x| \implies \exists\, \theta \in \mathbb{R} \quad x = e^{i\theta}|x|.$$

3. Soit $\mathrm{F} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\mathrm{A} = |\mathrm{F}|$. Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, avec $0 < x$, tel que $\mathrm{A}x = \mathrm{F}x$, alors on a $\mathrm{A} = \mathrm{F}$.

4. Une norme $\| \ \|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si :

$$\forall\, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \qquad \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{B}\|.$$

On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \|x\| = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}_n} |x_j|$.

i. Justifier brièvement que l'application :

$\| \ \|_\infty : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\|\mathrm{A}\|_\infty = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|\mathrm{A}x\|}{\|x\|}$, est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

ii. On pose : $\mathrm{A} = (a_{i,j})$. Vérifier que :

$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

iii. Montrer que la norme $\| \ \|_\infty$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est sous-multiplicative.

II

Étude du rayon spectral d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $\| \ \|$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

i. Montrer qu'il existe une matrice $\underline{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, non nulle, telle que $\mathrm{AX} = \lambda\,\mathrm{X}$.

ii. En déduire que $\rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}\|$.

2. Soit S une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

i. Comparer $\rho(\mathrm{A})$ et $\rho(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS})$.

ii. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(\mathrm{A}^k) = [\rho(\mathrm{A})]^k$, et en déduire que $\rho(\mathrm{A}) \leqslant \|\mathrm{A}^k\|^{\frac{1}{k}}$.

iii. Montrer que l'application $\mathrm{N} : \mathrm{X} \longmapsto \|\mathrm{S}^{-1}\mathrm{X}\,\mathrm{S}\|$ est encore une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $T = (t_{ij})$ une matrice triangulaire semblable à A.

   i. Calculer la matrice $\Delta^{-1} T \Delta$, avec $\Delta = \operatorname{diag}(1, d, \dots, d^{n-1})$ où $d > 0$.

   ii. En déduire l'existence d'une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon .$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   i. On suppose $\rho(A) < 1$. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

   ii. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = 1$ et que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ne soit pas bornée.

   iii. Montrer que $\rho(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. Pour cela, $\varepsilon > 0$ étant fixé, on considérera la matrice $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$, et on utilisera II.4.i.

5. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $|A| \leqslant B$.

   i. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $|A^k| \leqslant |A|^k \leqslant B^k$.

   ii. En déduire que $\rho(A) \leqslant \rho(|A|) \leqslant \rho(B)$.

III

Propriétés des matrices carrées réelles positives

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positive ($A \geqslant 0$ ou $\forall (i, j),\ a_{i,j} \geqslant 0$).

1. On suppose, dans cette question III.1 seulement, que la matrice A vérifie :

$$\exists s \in \mathbb{R}_+, \quad \forall i \in \mathbb{N}_n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s .$$

   Montrer que s est une valeur propre de A et que :

$$\rho(A) = s = \|A\|_\infty .$$

2. On pose $\alpha = \inf\limits_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \right)$ et $\beta = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) = \|A\|_\infty$.

   i. Trouver une matrice $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $0 \leqslant B \leqslant A$ et que : $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \sum\limits_{j=1}^{n} b_{i,j} = \alpha$.

   ii. En déduire l'encadrement : $\alpha \leqslant \rho(A) \leqslant \beta$.

3. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$.

   On pose $D_x = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

   Calculer la matrice $D_x^{-1} A D_x$ et en déduire l'encadrement :

$$\inf_{i \in \mathbb{N}_n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \sup_{i \in \mathbb{N}_n} \frac{(Ax)_i}{x_i} .$$

4. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$, et r un réel positif ou nul.

   i. Montrer que si $Ax = rx$ alors $\rho(A) = r$.

   ii. Comparer $\rho({}^tA)$ et $\rho(A)$ et en déduire que si ${}^txA = r\,{}^tx$, alors $\rho(A) = r$.

5. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 < x$.

   On désigne par α et β deux réels positifs ou nuls.

   i. Montrer les implications :
   $\alpha x \leqslant Ax$ (resp. $< Ax$) $\Rightarrow$ $\alpha \leqslant \rho(A)$ (resp. $< \rho(A)$).
   $Ax \leqslant \beta x$ (resp. $< \beta x$) $\Rightarrow$ $\rho(A) \leqslant \beta$ (resp. $< \beta$).

   ii. En déduire les implications :
   $\alpha\,{}^tx \leqslant {}^txA$ (resp. $< {}^txA$) $\Rightarrow$ $\alpha \leqslant \rho(A)$ (resp. $< \rho(A)$).
   ${}^txA \leqslant \beta\,{}^tx$ (resp. $< \beta\,{}^tx$) $\Rightarrow$ $\rho(A) \leqslant \beta$ (resp. $< \beta$).

IV

Étude des matrices carrées réelles strictement positives

On suppose que $A = (a_{i,j})$ est une matrice strictement positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($A > 0$, ou $\forall (i,j)\ a_{i,j} > 0$). On pose $r = \rho(A)$.

1. Vérifier que l'on a $r > 0$.

2. Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \leqslant y$ et $y \neq 0$.

   On suppose que $ry \leqslant Ay$.

   i. On pose $v = Ay$ et $z = Ay - ry$. Vérifier que $v > 0$ et montrer que la relation $rv < Av$ est impossible.

   ii. En déduire que : $ry = Ay$.

3. Soit x un vecteur propre (non nul) associé à une valeur propre λ de A vérifiant $|\lambda| = r$.

   i. Montrer que $A|x| = r|x|$ et en déduire que $|x| > 0$.

   ii. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta}|x|$.

4. i. Déduire de ce qui précède que r est effectivement valeur propre de A, et qu'il s'agit de l'unique valeur propre de A de module égal à r.

   ii. Montrer que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(rI_n - A)$ associé à r est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$.
   (Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant $\dim \mathrm{Ker}(rI_n - A) \geqslant 2$.)

5. On fixe $v > 0$, vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(rI_n - A)$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w > 0; \qquad {}^twA = r\,{}^tw; \qquad {}^twv = 1$$

V

Étude des matrices carrées positives et irréductibles

A. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive ($A \geqslant 0$).

Dans les questions 1. et 2. on suppose, en outre, que A satisfait à la condition suivante :

$r = \rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module égal à r, $\operatorname{Ker}(rI_n - A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$. Pour chaque choix de v, il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w > 0; \qquad {}^t w A = r\, {}^t w; \qquad {}^t w v = 1\,.$$

1. On pose $L = v\, {}^t w$.

   i. Montrer que L est indépendante du choix de v, et que c'est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ strictement positif et de rang 1.

   ii. Décrire géométriquement l'endomorphisme $L : x \longmapsto Lx$ de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de la droite vectorielle $\mathbb{C} \cdot v$ et de l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^n : {}^t w x = 0\}$.

2. i. Montrer que H est stable par A et que si x est un vecteur non nul de H tel que $Ax = \mu x$ ($\mu \in \mathbb{C}$) alors $|\mu| < r$.

   ii. En déduire que dans une base convenable $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}^n$ l'endomorphisme $x \longmapsto Ax$ a une matrice A' de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C}), \text{ et } \rho(B) < r.$$

   Vérifier que r est racine simple du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.

   iii. Calculer $L' = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{A'}{r}\right)^k$ et décrire géométriquement l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}^n$ est L'.

   iv. En déduire que $L = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\dfrac{A}{r}\right)^k$ et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, on ait $A^k > 0$.

3. Dans cette question $A \geqslant 0$ est une matrice carrée positive quelconque.

   i. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A(\varepsilon) = A + \varepsilon J$.

   Montrer que la fonction $f : \varepsilon \longmapsto \rho(A(\varepsilon))$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et a une limite $\ell \geqslant \rho(A)$ lorsque ε tend vers 0 par valeurs supérieures.

   ii. Montrer que $f(\varepsilon) = \rho(A(\varepsilon))$ est une valeur propre de $A(\varepsilon)$ et qu'il existe un unique vecteur propre, noté $x(\varepsilon)$, associé à cette valeur propre et appartenant à l'ensemble :

$$K = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n \,:\, x \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}.$$

   iii. En déduire qu'il existe $x \in K$ tel que $Ax = \ell x$.

   Comparer ℓ et $\rho(A)$.

B. On suppose que $n \geqslant 2$ et que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est positive.

On appelle sous-espace de coordonnées associé à une partie I de $\mathbb{N}_n$ le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^{I} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \forall j \in \mathbb{N}_n \setminus I,\ x_j = 0 \right\}.$$

La matrice A est dite <u>irréductible</u> si les seuls sous-espaces de coordonnées stables par A sont :

$$\{0\} = \mathbb{R}^{\emptyset} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_n}.$$

Dans le cas contraire A est dite réductible.

Soit d'autre part $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{L}(i, j, m)$ la proposition :

$$\exists\, (i_0, \dots, i_m) \in (\mathbb{N}_n)^{m+1} : \begin{cases} i_0 = i,\ i_m = j \\ \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, m-1\},\ a_{i_k, i_{k+1}} \neq 0 \end{cases}$$

et $\mathscr{L}(i, j)$ la proposition :

$$\exists\, m \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{L}(i, j, m) \text{ est vraie.}$$

1. i. Vérifier que A est réductible si et seulement si il existe une partition non triviale (I, J) de $\mathbb{N}_n$ $(I \neq \emptyset, J \neq \emptyset, I \cap J = \emptyset, I \cup J = \mathbb{N}_n)$ telle que :

$$\forall (i, j) \in I \times J : a_{i,j} = 0.$$

Montrer que dans cette situation, pour tout couple $(i, j) \in I \times J$, $\mathscr{L}(i, j)$ n'est pas vraie.

ii. Soit $j \in \mathbb{N}_n$. On pose $\mathscr{I}_j = \{j\} \cup \{j' \in \mathbb{N}_n \ \ \mathscr{L}(j', j) \text{ est vraie}\}$.
Montrer que $\mathbb{R}^{\mathscr{I}_j}$ est stable par A.

iii. Déduire de ce qui précède l'équivalence :

$$\text{A irréductible} \iff \text{Pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n,\ \mathscr{L}(i, j) \text{ est vraie.}$$

2. On suppose que $\mathscr{L}(i, j)$ est vraie, avec $i \neq j$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\mathscr{L}(i, j, m)$ soit vraie.

3. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^m = \left(a_{i,j}^{(m)}\right)$.

i. Établir une relation de récurrence entre $a_{i,j}^{(m)}$ et les $a_{k,l}^{(m-1)}$, et montrer que pour $i \neq j$ on a l'équivalence :

$$\mathscr{L}(i, j, m) \text{ est vraie} \iff a_{i,j}^{(m)} > 0.$$

ii. En conclure que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a. la matrice A est irréductible ;

b. pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ tel que $i \neq j$, il existe $m \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que : $a_{i,j}^{(m)} > 0$;

c. $(I + A)^{n-1} > 0$; critère d'irréductibilité.

On pose à nouveau $r = \rho(A)$.

4. i. Déduire de V.A.3.iii. que $\rho(I_n + A) = 1 + r$ et que $\rho((I_n + A)^{n-1}) = (1 + r)^{n-1}$.

ii. On suppose que A est irréductible. Montrer que $(1 + r)^{n-1}$ est une racine simple de $P_{(I+A)^{n-1}}$.
En déduire que r est une racine simple de P_A et que, de plus, $r > 0$.

iii. On suppose encore que A est irréductible. Montrer que le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(r I_n - A)$ associé à r est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $v > 0$.

5. On dit que la matrice $A \geqslant 0$ est primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k > 0$.

   i. Montrer que si A est primitive, alors r est l'unique valeur propre de A de module égal à r et que, de plus, A est irréductible.

   ii. Réciproquement, montrer que si A est irréductible et si r est l'unique valeur propre de A de module égal à r, alors A est primitive.

   iii. Montrer que la matrice carrée

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   est primitive $(A_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geqslant 2)$.