Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2009

Première épreuve écrite

– NOTATIONS –

- n désigne un entier naturel non nul.
- $[n]$ désigne l'ensemble des n premiers entiers non nuls.
- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. et $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients complexes. Son élément neutre pour la multiplication, la matrice identité, est notée $\mathbf{1}_n$.
- $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs.
- $\mathcal{P}_n^{>0}$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs et dont les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales à 1, c'est à dire le sous-ensemble de $\mathcal{P}_n$ formé par les matrices $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ telles que : $\forall i \in [n]$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.
- Soient x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$. On note $x \leqslant y$ si, pour tout i dans $[n]$, $x_i \leqslant y_i$.
- Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ dans $\mathcal{P}_n$. On note $A \leqslant B$ si, pour tous entiers i et j dans $[n]$, on a $a_{i,j} \leqslant b_{i,j}$.

Dans les espaces vectoriels de dimension finie considérés dans ce problème, la notion de limite est relative à l'unique topologie associée à une norme arbitraire sur ces espaces.

– PRÉLIMINAIRES –

Soient $t_1, \ldots, t_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [n],\ |z_i| \leqslant 1, \\ \\ |\sum_{i=1}^n t_i z_i| = 1. \end{cases}$$

On se propose de démontrer qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que, pour tout i dans $[n]$, on ait $z_i = z$.

1. Dans le cas particulier où $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n t_i z_i = 1$, démontrer que, pour tout i dans $[n]$, on a $z_i = 1$.
2. Démontrer le cas général (*Indication : on pourra, en posant $Z = \sum_{i=1}^n t_i z_i$, considérer la partie réelle du nombre complexe $\sum_{i=1}^n t_i z_i / Z$.*)

– PARTIE I –

Dans cette partie, on suppose $n = 2$.

Soient x, y deux nombres réels ; on pose

$$P_{x,y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1+y & 1-y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de $P_{x,y}$ et, pour chaque valeur propre, son sous-espace propre associé. Pour quelles valeurs de (x, y), la matrice $P_{x,y}$ est-elle diagonalisable ?
2. On suppose désormais $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$.

(a) Démontrer qu'il existe un nombre réel u tel que $-1 < u < 1$ et une matrice inversible U tels que

$$P_{x,y} = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} U .$$

(b) En déduire que la suite $(P_{x,y}^k)_{k \in \mathbf{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?

(c) Démontrer que

$$L = \frac{1}{2+y+x} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 1+y & 1+x \end{pmatrix} .$$

Soit A une matrice dans $\mathcal{P}_2^{>0}$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

4. Exprimer le discriminant Δ_A du polynôme caractéristique de la matrice A en fonction de a, b, c, d .

5. Démontrer l'inégalité $\Delta_A > 0$.

6. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. En notant λ_1, λ_2 ces deux valeurs propres numérotées de façon à avoir $\lambda_1 > \lambda_2$, démontrer l'inégalité $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admette une limite lorsque k tend vers $+\infty$. Dans le cas où cette limite existe et n'est pas nulle, que peut-on dire de son rang ? Proposer une méthode pour calculer cette limite.

8. Soient λ_1 et λ_2 deux nombres réels tels que $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Exhiber une matrice A dans $\mathcal{P}_2^{>0}$ dont les valeurs propres sont λ_1 et λ_2 (*Indication : on pourra commencer par traiter le cas* $\lambda_1 = 1$).

– PARTIE II –

Les matrices de $\mathcal{M}_n$ sont considérées comme des endomorphismes de $\mathbf{C}^n$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$; on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A, c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de A. Si x est un vecteur de $\mathbf{C}^n$, on notera Ax l'image du vecteur x par l'endomorphisme défini par la matrice A.

II A : On se propose de démontrer l'équivalence :

$$\rho(A) < 1 \iff \lim_{k\to\infty} A^k = 0 .$$

1. Soit β un nombre complexe tel que $|\beta| < 1$. Soit B une matrice nilpotente dans $\mathcal{M}_n$, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel $\ell \geqslant 1$ tel que $B^\ell = 0$; soit C la matrice $\beta\mathbf{1}_n + B$.

(a) Pour tout entier $k \geqslant \ell$, exprimer C^k en fonction de $\mathbf{1}_n, B, \ldots, B^{\ell-1}$.

(b) En déduire que la suite $(C^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

2. Soit A dans $\mathcal{M}_n$.

(a) Soit α une valeur propre de A. On pose $F_\alpha = \cup_{k\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k$.

i. Justifier que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ et que $A(F_\alpha) \subset F_\alpha$.

ii. Soit A_α l'endomorphisme de F_α défini par $A_\alpha(x) = Ax$, pour $x \in F_\alpha$. Dans le cas où $|\alpha| < 1$, démontrer que la suite $(A_\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

(b) On suppose $\rho(A) < 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

(c) Réciproquement, si la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers 0, montrer que le module de toute valeur propre de A est strictement inférieur à 1.

II B :

1. Soit I_A l'ensemble formé par les nombres réels strictement positifs γ tels que la suite $\big((A/\gamma)^k\big)_{k\in\mathbf{N}}$ tende vers 0. Démontrer que I_A est l'intervalle $]\rho(A), +\infty[$.

2. On suppose que A admet la valeur propre 1 et qu'il existe deux vecteurs x et y non nuls tels que $Ax = x$ et $Ay = y + x$. Démontrer que la suite $(A^k y)_{k\in\mathbf{N}}$ n'est contenue dans aucune partie compacte de $\mathbf{C}^n$.

3. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ a pour limite une matrice B non nulle.

(a) Démontrer que $\rho(A) = 1$.

(b) Soit α une valeur propre de module 1 de A. Démontrer que la suite $(\alpha^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{C}$ et en déduire que $\alpha = 1$.

(c) Démontrer que le sous-espace vectoriel F_1 défini à la question IIA2(a) est égal à $\operatorname{Ker}(A - \mathbf{1}_n)$.

– PARTIE III –

Dans la suite du problème, on fait les conventions suivantes :
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ dans $\mathcal{M}_n$. Si x est un vecteur de $\mathbf{C}^n$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, les coordonnées du vecteur Ax sont notées $((Ax)_1, \ldots, (Ax)_n)$; autrement dit, pour tout entier i dans $[n]$,

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j .$$

On note w le vecteur de $\mathbf{C}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

1. Soit $A \in \mathcal{P}_n$. Démontrer que A appartient à $\mathcal{S}_n$ si et seulement si $Aw = w$.

2. Soient A et B dans $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{S}_n$). Démontrer que AB est dans $\mathcal{P}_n$ (respectivement $\mathcal{S}_n$).

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n$.

(a) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble formé par les vecteurs v de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$ tels que, pour tout i dans $[n]$, $|v_i| \leqslant 1$. Démontrer que $\mathcal{B}$ est conservé par A.

(b) En déduire que $\rho(A) = 1$.

4. Soit A dans $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$.

(a) Soit $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vecteur propre associé à une valeur propre α de module 1 de A. Démontrer que les coordonnées de v sont égales et déterminer α. (*Indication : on pourra utiliser une égalité* $1 = |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{v_j}{v_i}|$ *pour* v_i *non nul convenablement choisi.*)

(b) Soit v un vecteur de $\mathcal{B}$ tel qu'il existe μ dans $\mathbf{C}$ tel que $Av = v + \mu w$. En considérant la suite $(A^k v)_{k \in \mathbf{N}}$, démontrer que $\mu = 0$.

(c) Démontrer que 1 est une racine simple du polynôme caractéristique de A.

(d) Démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}$ telles que $\rho(B) < 1$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U .$$

(e) En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ admet une limite quand k tend vers $+\infty$. Cette limite est notée L. Quel est le rang de L ?

(f) Démontrer que la limite L de la suite $(A^k)_{k \in \mathbf{N}}$ s'écrit :

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix} .$$

où $u_1, \ldots, u_n$ sont des nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{n} u_i = 1$.

(g) Démontrer que Ker $({}^tA - \mathbf{1}_n)$ est la droite engendrée par le vecteur de coordonnées $(u_1, \ldots, u_n)$.

(h) Dans le cas particulier où A et ${}^tA$ sont toutes deux dans $\mathcal{S}_n$, expliciter L.

5. Soit A dans $\mathcal{S}_n$.

(a) Démontrer que A est la limite d'une suite de matrices de $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. (*Indication : on pourra remarquer que si* A *et* B *sont dans* $\mathcal{S}_n$ *et si* t *est un nombre réel dans* $[0, 1]$, $tA + (1-t)B$ *est dans* $\mathcal{S}_n$.)

(b) En déduire que ${}^tA$ admet un vecteur propre relatif à la valeur propre 1 dont toutes les coordonnées sont positives.

(c) Démontrer sur un exemple que 1 n'est pas en général une racine simple du polynôme caractéristique de A.

(d) Démontrer sur un exemple que A peut avoir des valeurs propres de module 1 différentes de 1.

– PARTIE IV –

Dans toute cette partie, on considère une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$, et on suppose que $A \in \mathcal{P}_n^{>0}$.

IV A : On se propose de démontrer que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est une droite engendrée par un vecteur dont les coordonnées sont des nombres réels strictement positifs.

1. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées sont des nombres réels positifs. Démontrer que les coordonnées du vecteur Ax sont des nombres réels strictement positifs.

2. Soit α un nombre réel. Supposons que, pour tout i dans $[n]$, on ait $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \alpha$. Démontrer que α est une valeur propre de A et que $\alpha = \rho(A)$.

3. Soit B dans $\mathcal{P}_n^{>0}$ telle que $A \leqslant B$.

(a) Pour tout vecteur x de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels positifs, démontrer que

$$Ax \leqslant Bx\,.$$

(b) Soit k un entier naturel $\geqslant 2$. Démontrer que $A^k \leqslant B^k$.

(c) En déduire l'inégalité $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

4. On pose $\alpha = \min_{i\in[n]}(\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Démontrer que $\alpha \leqslant \rho(A)$. On pourra considérer la matrice $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$ telle que, pour tous entiers i et j dans $[n]$,

$$b_{i,j} = \frac{\alpha a_{i,j}}{\sum_{k=1}^n a_{i,k}}\,.$$

5. On pose $\beta = \max_{i\in[n]}(\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Démontrer l'inégalité $\rho(A) \leqslant \beta$.

6. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels strictement positifs. Soient γ et δ deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\gamma x \leqslant Ax \leqslant \delta x\,.$$

(a) Soit S la matrice diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix}.$$

Justifier que S est inversible et déterminer les coefficients de la matrice $S^{-1}AS$.

(b) En déduire les inégalités $\gamma \leqslant \rho(A) \leqslant \delta$.

(c) Démontrer qu'il existe un indice i dans $[n]$ tel que $(Ax)_i \leqslant \rho(A)x_i$.

7. Soit x un vecteur non nul de $\mathbf{C}^n$ dont les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des nombres réels strictement positifs. On suppose que $\rho(A)x \leqslant Ax$. Démontrer que $Ax = \rho(A)x$ (*Indication : on pourra considérer le vecteur* $A(Ax - \rho(A)x)$).

8. Soit α une valeur propre de A dont le module est égal à $\rho(A)$. Soit v un vecteur propre associé, de coordonnées $(v_1, \ldots, v_n)$, et soit x le vecteur de coordonnées $(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|)$.

(a) Démontrer que x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$.

(b) Démontrer que toutes les coordonnées de x sont strictement positives.

(c) En utilisant la matrice S définie dans la question IVA6a associée à ce vecteur x, démontrer qu'il existe une matrice U inversible et une matrice B telles que $\rho(B) < \rho(A)$ et

$$A = U^{-1} \begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} U \,.$$

IV B : On étudie le comportement de la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$.

1. Démontrer qu'il existe un unique vecteur y de $\mathbf{C}^n$ ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que $Ay = \rho(A)y$. De même, démontrer qu'il existe un unique vecteur z de $\mathbf{C}^n$ ayant pour coordonnées des nombres réels strictement positifs dont la somme est égale à 1 et tel que ${}^tAz = \rho(A)z$.

2. On suppose $\rho(A) = 1$. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers la matrice L,

$$L = (y_i z_j)_{(i,j)\in[n]\times[n]},$$

où $(y_1, \ldots, y_n)$ et $(z_1, \ldots, z_n)$ sont respectivement les coordonnées des vecteurs y et z de la question IVB1.

3. On suppose $\rho(A) > 1$. Pour tout entier naturel k, on note $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{(i,j)\in[n]\times[n]}$. Pour tout i et j dans $[n]$, démontrer que la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

– PARTIE V –

Dans cette partie, on prend $n = 3$.
Pour toute matrice B dans $\mathcal{M}_3$, $\mathrm{Tr}\,(B)$ désigne la trace de la matrice B, somme de ses coefficients diagonaux.
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[3]\times[3]} \in \mathcal{P}_3^{>0}$. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les trois valeurs propres complexes de A, distinctes ou confondues, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

1. Démontrer les inégalités $\mathrm{Tr}\,(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$. En déduire l'inégalité $3\,\mathrm{Tr}\,(A^2) > \mathrm{Tr}\,(A)^2$.

2. Exprimer $\mathrm{Tr}\,(A)$ et $\mathrm{Tr}\,(A^2)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3. On suppose que l'on a $\alpha_1 = 1$ et que α_2 et α_3 sont deux nombres complexes conjugués $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$ où t et r sont des nombres réels et $0 \leqslant r < 1$.

(a) Démontrer l'égalité $3\,\mathrm{Tr}\,(A^2) - \mathrm{Tr}\,(A)^2 = 2(1 - 2r\cos\,(t + \frac{\pi}{3}))(1 - 2r\cos\,(t - \frac{\pi}{3}))$.

(b) En déduire que α_2 est à l'intérieur d'un triangle inscrit sur le cercle unité ; préciser la nature et les sommets de ce triangle.

4. Réciproquement, posons $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = re^{it}$ et $\alpha_3 = re^{-it}$, où t et r sont des nombres réels et $0 \leqslant r < 1$. On suppose que α_2 est à l'intérieur du triangle trouvé à la question V3. Démontrer que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les valeurs propres d'une matrice de $\mathcal{P}_3^{>0}$. *Indication : On pourra considérer la matrice :*

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + 2r\cos(t) & 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r\cos(t) & 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) \\ 1 - 2r\cos(t + \frac{\pi}{3}) & 1 - 2r\cos(t - \frac{\pi}{3}) & 1 + 2r\cos(t) \end{pmatrix}.$$

5. On admet que, si α_1, α_2 et α_3 sont trois nombres réels qui satisfont aux conditions

$$\alpha_1 = 1,\ |\alpha_2| < 1,\ |\alpha_3| < 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0,$$

il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les valeurs propres sont α_1, α_2 et α_3.
Compte tenu de cela et des questions précédentes, décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ formé par les triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\mathbf{C}^3$ tels qu'il existe une matrice A dans $\mathcal{P}_3^{>0}$ dont les trois valeurs propres complexes distinctes ou confondues, sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, numérotées de telle façon que $\alpha_1 = \rho(A)$.

——— FIN DU SUJET ———