Préambule : notations et rappels

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbf{K}$ l'un de ces deux corps lorsqu'on ne souhaite pas le préciser.

On désigne par $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et par $\mathbf{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices (n,n) à coefficients dans $\mathbf{K}$ et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $GL_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note Tr l'application trace.

Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $\mathcal{S}p(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; on note ${}^tM$ sa matrice transposée. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on note M^* sa matrice adjointe, i.e. $M^* = {}^t\overline{M}$.

On rappelle qu'une matrice M symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou hermitienne dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite positive (respectivement définie positive) lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles (respectivement strictement positives).

On note $U_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $M^*M = I_n$. Ainsi $U_n(\mathbf{R})$ désigne le groupe orthogonal et $U_n(\mathbf{C})$ le groupe unitaire.

On rappelle que $U_n(\mathbf{R})$ contient les matrices P (dites de rotation plane) définies, pour (i_0, j_0) tel que $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant n$ et $\theta \in \mathbf{R}$, de la façon suivante :

$$P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ avec } \quad p_{i,j} = \begin{cases} \cos\theta & \text{si } i = j = i_0 \text{ ou } i = j = j_0 \text{ ;} \\ \sin\theta & \text{si } i = i_0 \text{ et } j = j_0 \text{ ;} \\ -\sin\theta & \text{si } i = j_0 \text{ et } j = i_0 \text{ ;} \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \notin \{i_0, j_0\} \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tout le problème, on considère les sous-ensembles de $\mathbf{C}$ suivants :

$\mathcal{O}^+$ est le demi-plan ouvert des nombres complexes de partie réelle > 0 ;

$\mathcal{O}^-$ le demi-plan ouvert des nombres complexes de partie réelle < 0 ;

$\mathcal{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module < 1.

Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle.

Préliminaires

1. Soit z un nombre complexe qui n'est pas un nombre réel négatif ou nul ($z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$). Démontrer qu'il existe un unique nombre complexe dans $\mathcal{O}^+$ noté $\sqrt{z}$, tel que $(\sqrt{z})^2 = z$.

2. Soit g la fonction de la variable complexe z définie sur $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ par :

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

   (a) Démontrer que $g(\mathcal{O}^+) \subset \mathcal{D}$.

   (b) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathcal{O}^+$ sur $\mathcal{D}$. Expliciter la bijection inverse.

3. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'application N en posant, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$N(M) = \mathrm{Tr}({}^tMM).$$

   (a) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = (m_{i,j})$. Justifier que ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive, qui est définie positive si M est inversible.

   (b) Justifier que N est le carré d'une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Expliciter le produit scalaire euclidien $< , >$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ < M, M >= N(M).$$

4. Expliciter un produit hermitien sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que la norme associée, notée N', vérifie :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\ N'(M) = \mathrm{Tr}(M^*M).$$

Partie I

5. Soit L une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $L^2 = I_n$.

   (a) Démontrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbf{K}^n$ tels que :
   i) $\mathbf{K}^n = F \oplus G$;
   ii) $\forall x \in F,\ Lx = x$;
   iii) $\forall x \in G,\ Lx = -x$.

   (b) Démontrer que $\mathrm{Tr}(L) = \dim F - \dim G$.

6. Soit $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des matrices L dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $L^2 = I_n$. On définit sur $\mathcal{I}_n$ la relation $\sim$ par :

$$\forall L, M \in \mathcal{I}_n,\quad L \sim M \quad \text{si } \exists P \in GL_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } M = P^{-1}LP.$$

   (a) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{I}_n$.

   (b) Soient L et M deux matrices dans $\mathcal{I}_n$. Démontrer que :

$$L \sim M \iff \mathrm{Tr}(L) = \mathrm{Tr}(M).$$

   (c) Justifier que la relation $\sim$ n'a qu'un nombre fini de classes d'équivalence. Déterminer ce nombre.

Partie II

Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que le spectre de A, $\mathcal{S}p(A)$, est contenu dans $\mathcal{D}$. On se propose de démontrer qu'alors la suite $(A^\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

7. On suppose que A admet une unique valeur propre α. On pose $B = A - \alpha I_n$.

 (a) Justifier que $B^n = 0$.

 (b) Soit ℓ un entier naturel non nul. Exprimer A^ℓ en fonction de $I, B, ..., B^{n-1}$.

 (c) En déduire que la suite $(A^\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

8. Dans le cas général, démontrer que la suite $(A^\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

Partie III

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

Pour α dans $\mathbf{C}^*$, on considère la suite récurrente $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha\ ; \\ u_{\ell+1} &= \frac{1}{2}(u_\ell + \frac{1}{u_\ell}) \quad \text{pour } \ell \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Lorsque la suite $\mathbf{u}^\alpha$ est bien définie (c'est-à-dire si u_ℓ est défini pour tout entier naturel ℓ) et que de plus elle converge dans $\mathbf{C}$, sa limite est notée s^α.

9. Donner une valeur non nulle de α telle que la suite $\mathbf{u}^\alpha$ n'est pas bien définie.

10. Soit α un nombre réel non nul. Démontrer que la suite $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ est bien définie. Étudier la monotonie de la suite $\mathbf{u}^\alpha$ et démontrer qu'elle converge. Expliciter la valeur de s^α en fonction de α.

11. **(a)** Justifier que les demi-plans O^+ et O^- sont stables par f. En déduire que si α n'est pas un imaginaire pur, la suite $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

 (b) Soit β un nombre complexe de module différent de 1. Pour tout entier naturel ℓ, on pose :

$$w_\ell = \frac{1 + \beta^{2^\ell}}{1 - \beta^{2^\ell}}.$$

 Justifier que $w_{\ell+1} = f(w_\ell)$. Démontrer que la suite $(w_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

 (c) On suppose que α n'est pas un imaginaire pur. Justifier que la suite $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge. Expliciter la valeur de s^α en fonction de α.

Partie IV

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit A une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\mathcal{S}p(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A. On s'intéresse dans le problème à l'éventuelle limite de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 & = A \ ; \\ U_{\ell+1} & = \dfrac{1}{2}(U_\ell + U_\ell^{-1}) \quad \text{pour } \ell \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

lorsque celle-ci est bien définie (c'est-à-dire si U_ℓ est défini pour tout entier naturel ℓ). Lorsque la suite $\mathbf{U}^A$ admet une limite, celle-ci est notée L^A.

12. On suppose, dans cette question seulement, la matrice A diagonalisable. On suppose de plus que son spectre $\mathcal{S}p(A)$ satisfait la propriété :

$$(\mathrm{P}) : \ \mathcal{S}p(A) \cap i\mathbf{R} = \emptyset.$$

(a) Démontrer que la suite récurrente $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ est bien définie.

(b) Démontrer que la suite récurrente $\mathbf{U}^A$ converge. Justifier que L^A est une matrice diagonalisable telle que $\left(L^A\right)^2 = I_n$.

(c) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(U_\ell) + \mathrm{Tr}(U_\ell^{-1})\right)\right)_{\ell \in \mathbf{N}}$ converge vers un nombre entier qu'on explicitera en fonction des valeurs propres de A.

13. On suppose ici que la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{P+}) : \ \mathcal{S}p(A) \subset \mathcal{O}^+.$$

(a) Justifier que la matrice $\dfrac{1}{2}\left(A + A^{-1}\right)$ vérifie la propriété (P+). En déduire que la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ est bien définie et que chacune des matrices U_ℓ vérifie la propriété (P+).

(b) Soit α une valeur propre de la matrice $(A - I_n)(A + I_n)^{-1}$. Démontrer qu'il existe β une valeur propre de A telle que $g(\beta) = \alpha$ (où g est la fonction définie dans les préliminaires).

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel ℓ,

$$(U_{\ell+1} - I_n)(U_{\ell+1} + I_n)^{-1} = \left((U_\ell - I_n)(U_\ell + I_n)^{-1}\right)^2.$$

En déduire l'expression de $(U_{\ell+1} - I_n)(U_{\ell+1} + I_n)^{-1}$ en fonction de la matrice $(A - I_n)(A + I_n)^{-1}$.

(d) Justifier que la suite $\left((U_\ell - I_n)(U_\ell + I_n)^{-1}\right)_{\ell \in \mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

(e) En déduire la convergence de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$. Expliciter L^A.

14. Lorsque la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{P-}) : \ \mathcal{S}p(A) \subset \mathcal{O}^-$$

justifier la convergence de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ et expliciter L^A.

15. On suppose ici que la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{P}) : \ \mathcal{S}p(A) \cap i\mathbf{R} = \emptyset.$$

(a) On suppose de plus dans cette question que la matrice A ne vérifie ni la propriété (P+) ni la propriété (P-). Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et deux matrices carrées C et D telles que :

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} P \ \text{ et } \ \mathcal{S}p(C) \subset \mathcal{O}^{+} \ \text{ et } \ \mathcal{S}p(D) \subset \mathcal{O}^{-}.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$. Expliciter les valeurs propres de L^A.

Partie V

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose dans cette partie que la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{Q}) : \ \mathcal{S}p(A) \cap \mathbf{R}^{-} = \emptyset.$$

On définit la matrice B dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$ en posant :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Déterminer les valeurs propres de la matrice B en fonction des valeurs propres de A. On précisera leurs multiplicités en fonction des multiplicités des valeurs propres de A.

17. Justifier que la matrice B vérifie la propriété (P) (définie dans la partie IV) et en déduire que la suite $\mathbf{U}^B$ converge.

18. Démontrer que les termes de la suite $\mathbf{U}^B$ vérifient :

$$\forall \ell \in \mathbf{N}, \exists Y_\ell \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ / \ U_\ell = \begin{pmatrix} 0 & AY_\ell \\ Y_\ell & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } Y_\ell \text{ est un polynôme en } A.$$

19. En déduire qu'il existe une matrice L dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$L^B = \begin{pmatrix} 0 & AL \\ L & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } AL = LA.$$

Démontrer de plus que L est un polynôme en A.

20. Démontrer qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{A}$ qui vérifie la propriété (P+) et telle que :

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = A.$$

21. Lorsque A est une matrice réelle symétrique (respectivement une matrice complexe hermitienne) définie positive, justifier l'existence de $\sqrt{A}$ et démontrer que $\sqrt{A}$ est une matrice réelle symétrique (respectivement une matrice complexe hermitienne) définie positive.

Partie VI

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

22. Justifier que $U_n(\mathbf{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

23. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$$

où N est l'application définie dans les préliminaires.

24. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit P_0 une matrice dans $U_n(\mathbf{R})$. Démontrer l'équivalence des assertions :

(a) $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$;

(b) $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ \mathrm{Tr}({}^tPM) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tP_0M)$;

(c) $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M + P) \leqslant N(M + P_0)$.

25. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique définie positive. Justifier que la seule matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ réalisant : $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$, est $P_0 = I_n$. On pourra exprimer, pour P dans $U_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tPM)$ sur une base bien choisie.

26. Réciproquement, soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - I_n) \leqslant N(M - P)$.

(a) On suppose M non symétrique. Justifier qu'il existe une matrice de rotation plane (dont la définition est rappelée dans le préambule) P telle que $\mathrm{Tr}(PM) > \mathrm{Tr}(M)$. En déduire que M est symétrique.

(b) Soit v un vecteur de $\mathbf{R}^n$ de norme 1. On note P_v la matrice $I_n - 2v\,{}^tv$.

i. Démontrer que $P_v \in U_n(\mathbf{R})$.

ii. Démontrer que $\mathrm{Tr}(P_vM) = \mathrm{Tr}(M) - 2 < v, Mv >$ où $< \, , \, >$ désigne ici le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

(c) Démontrer que M est symétrique positive.

(d) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que la seule matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ réalisant : $\forall P \in U_n(\mathbf{R})$, $N(M - I_n) \leqslant N(M - P)$, est $P_0 = I_n$. Démontrer que M est symétrique définie positive.

27. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) Justifier qu'il existe une matrice Q_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ telle que : $M = Q_0 \sqrt{{}^tMM}$ (cf. question 21).

(b) Démontrer qu'une telle matrice Q_0 est l'unique matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ qui vérifie : $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$.

28. Pourrait-on avoir l'unicité d'un tel P_0 lorsque la matrice M n'est pas inversible ?

Partie VII

29. Soient A_0 et V_0 deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que A_0 est une matrice antihermitienne et V_0 une matrice unitaire. Soit γ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : & \mathbf{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ & & t & \mapsto & V_0\, \mathrm{e}^{tA_0}\,. \end{array}$$

Démontrer que γ est une application de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathcal{U}_n(\mathbf{C})$. Expliciter $\gamma(0), \gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$.

30. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Soit η l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \eta & : & \mathcal{U}_n(\mathbf{C}) & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & & V & \mapsto & \mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}(M^*V))\,. \end{array}$$

Soit V_0 un maximum local de l'application η.

(a) Soit A_0 une matrice antihermitienne dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Justifier que :
  i) $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}(M^* V_0 A_0)) = 0$;
  ii) $\mathrm{Re}\,\left(\mathrm{Tr}(M^* V_0 A_0^2)\right) \leqslant 0$.

(b) En déduire que $M^* V_0$ est une matrice hermitienne définie positive.

31. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Justifier qu'il existe une unique matrice V_0 dans $\mathcal{U}_n(\mathbf{C})$ telle que $M = V_0 \sqrt{M^* M}$.

——— FIN DU SUJET ———