Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE

EAI MAT 1

SESSION 2017

AGRÉGATION
CONCOURS INTERNE
ET CAER

Section : MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

► **Concours interne de l'Agrégation de l'enseignement public** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAI	1300A	101	0540

► **Concours interne du CAER / Agrégation de l'enseignement privé** :

Concours	Section/option	Epreuve	Matière
EAH	1300A	101	0540

Préambule : notations et rappels

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbf{K}$ l'un de ces deux corps lorsqu'on ne souhaite pas le préciser.

On désigne par $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, et par $\mathbf{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs ou nuls.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbf{K}$ et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $GL_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note Tr l'application trace.

Soit M une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On note $Sp(M)$ le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$; on note ${}^tM$ sa matrice transposée. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on note M^* sa matrice adjointe, i.e. $M^* = {}^t\overline{M}$.

On rappelle qu'une matrice M symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou hermitienne dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite positive (respectivement définie positive) lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles (respectivement strictement positives).

On note $U_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $M^*M = I_n$. Ainsi $U_n(\mathbf{R})$ désigne le groupe orthogonal et $U_n(\mathbf{C})$ le groupe unitaire.

On rappelle que $U_n(\mathbf{R})$ contient les matrices P (dites de rotation plane) définies, pour (i_0, j_0) tel que $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant n$ et $\theta \in \mathbf{R}$, de la façon suivante :

$$P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \quad \text{avec} \quad p_{i,j} = \begin{cases} \cos\theta & \text{si } i = j = i_0 \text{ ou } i = j = j_0 \;; \\ \sin\theta & \text{si } i = i_0 \text{ et } j = j_0 \;; \\ -\sin\theta & \text{si } i = j_0 \text{ et } j = i_0 \;; \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } i \notin \{i_0, j_0\} \;; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans tout le problème, on considère les sous-ensembles de $\mathbf{C}$ suivants :
$\mathcal{O}^+$ est le demi-plan ouvert des nombres complexes de partie réelle > 0 ;
$\mathcal{O}^-$ le demi-plan ouvert des nombres complexes de partie réelle < 0 ;
$\mathcal{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module < 1.

Pour tout nombre complexe z, on note $\operatorname{Re}(z)$ sa partie réelle.

Préliminaires

1. Soit z un nombre complexe qui n'est pas un nombre réel négatif ou nul ($z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^-$). Démontrer qu'il existe un unique nombre complexe dans $\mathcal{O}^+$ noté $\sqrt{z}$, tel que $(\sqrt{z})^2 = z$.
2. Soit g la fonction de la variable complexe z définie sur $\mathbf{C} \setminus \{-1\}$ par :

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

   (a) Démontrer que $g(\mathcal{O}^+) \subset \mathcal{D}$.

   (b) Démontrer que g réalise une bijection de $\mathcal{O}^+$ sur $\mathcal{D}$. Expliciter la bijection inverse.

3. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'application N en posant, pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$N(M) = \mathrm{Tr}({}^tMM).$$

   (a) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = (m_{i,j})$. Justifier que ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive, qui est définie positive si M est inversible.

   (b) Justifier que N est le carré d'une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Expliciter le produit scalaire euclidien $< \, , \, >$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \, , \; < M, M >= N(M).$$

4. Expliciter un produit hermitien sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que la norme associée, notée N', vérifie :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \; N'(M) = \mathrm{Tr}(M^*M).$$

Partie I

5. Soit L une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $L^2 = I_n$.

   (a) Démontrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbf{K}^n$ tels que :
   i) $\mathbf{K}^n = F \oplus G$;
   ii) $\forall x \in F, \; Lx = x$;
   iii) $\forall x \in G, \; Lx = -x$.

   (b) Démontrer que $\mathrm{Tr}(L) = \dim F - \dim G$.

6. Soit $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des matrices L dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $L^2 = I_n$. On définit sur $\mathcal{I}_n$ la relation $\sim$ par :

$$\forall L, M \in \mathcal{I}_n, \quad L \sim M \quad \text{si } \exists P \in GL_n(\mathbf{K}) \text{ tel que } M = P^{-1}LP.$$

   (a) Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{I}_n$.

   (b) Soient L et M deux matrices dans $\mathcal{I}_n$. Démontrer que :

$$L \sim M \iff \mathrm{Tr}(L) = \mathrm{Tr}(M).$$

   (c) Justifier que la relation $\sim$ n'a qu'un nombre fini de classes d'équivalence. Déterminer ce nombre.

Partie II

Soit n un entier naturel non nul. Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que le spectre de A, $\mathcal{S}p(A)$, est contenu dans $\mathcal{D}$. On se propose de démontrer qu'alors la suite $(A^\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

7. On suppose que A admet une unique valeur propre α. On pose $B = A - \alpha I_n$.

(a) Justifier que $B^n = 0$.

(b) Soit ℓ un entier naturel non nul. Exprimer A^ℓ en fonction de $I, B, \ldots, B^{n-1}$.

(c) En déduire que la suite $(A^\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

8. Dans le cas général, démontrer que la suite $(A^\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

Partie III

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$.

Pour α dans $\mathbf{C}^*$, on considère la suite récurrente $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = \alpha\ ; \\ u_{\ell+1} & = \dfrac{1}{2}(u_\ell + \dfrac{1}{u_\ell}) \quad \text{pour } \ell \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Lorsque la suite $\mathbf{u}^\alpha$ est bien définie (c'est-à-dire si u_ℓ est défini pour tout entier naturel ℓ) et que de plus elle converge dans $\mathbf{C}$, sa limite est notée s^α.

9. Donner une valeur non nulle de α telle que la suite $\mathbf{u}^\alpha$ n'est pas bien définie.

10. Soit α un nombre réel non nul. Démontrer que la suite $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ est bien définie. Étudier la monotonie de la suite $\mathbf{u}^\alpha$ et démontrer qu'elle converge. Expliciter la valeur de s^α en fonction de α.

11. (a) Justifier que les demi-plans $\mathcal{O}^+$ et $\mathcal{O}^-$ sont stables par f. En déduire que si α n'est pas un imaginaire pur, la suite $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ est bien définie.

(b) Soit β un nombre complexe de module différent de 1. Pour tout entier naturel ℓ, on pose :

$$w_\ell = \frac{1 + \beta^{2^\ell}}{1 - \beta^{2^\ell}}.$$

Justifier que $w_{\ell+1} = f(w_\ell)$. Démontrer que la suite $(w_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(c) On suppose que α n'est pas un imaginaire pur. Justifier que la suite $\mathbf{u}^\alpha = (u_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ converge. Expliciter la valeur de s^α en fonction de α.

Partie IV

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit A une matrice inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\mathcal{S}p(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A. On s'intéresse dans le problème à l'éventuelle limite de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 &= A \ ; \\ U_{\ell+1} &= \dfrac{1}{2}(U_\ell + U_\ell^{-1}) \quad \text{pour } \ell \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

lorsque celle-ci est bien définie (c'est-à-dire si U_ℓ est défini pour tout entier naturel ℓ). Lorsque la suite $\mathbf{U}^A$ admet une limite, celle-ci est notée L^A.

12. On suppose, dans cette question seulement, la matrice A diagonalisable. On suppose de plus que son spectre $\mathcal{S}p(A)$ satisfait la propriété :

$$(\mathrm{P}) : \ \mathcal{S}p(A) \cap i\mathbf{R} = \emptyset.$$

(a) Démontrer que la suite récurrente $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ est bien définie.

(b) Démontrer que la suite récurrente $\mathbf{U}^A$ converge. Justifier que L^A est une matrice diagonalisable telle que $(L^A)^2 = I_n$.

(c) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}(U_\ell) + \mathrm{Tr}(U_\ell^{-1})\right)\right)_{\ell \in \mathbf{N}}$ converge vers un nombre entier qu'on explicitera en fonction des valeurs propres de A.

13. On suppose ici que la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{P+}) : \ \mathcal{S}p(A) \subset \mathcal{O}^+.$$

(a) Justifier que la matrice $\dfrac{1}{2}\left(A + A^{-1}\right)$ vérifie la propriété (P+). En déduire que la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ est bien définie et que chacune des matrices U_ℓ vérifie la propriété (P+).

(b) Soit α une valeur propre de la matrice $(A - I_n)(A + I_n)^{-1}$. Démontrer qu'il existe β une valeur propre de A telle que $g(\beta) = \alpha$ (où g est la fonction définie dans les préliminaires).

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel ℓ,

$$(U_{\ell+1} - I_n)(U_{\ell+1} + I_n)^{-1} = \left((U_\ell - I_n)(U_\ell + I_n)^{-1}\right)^2.$$

En déduire l'expression de $(U_{\ell+1} - I_n)(U_{\ell+1} + I_n)^{-1}$ en fonction de la matrice $(A - I_n)(A + I_n)^{-1}$.

(d) Justifier que la suite $\left((U_\ell - I_n)(U_\ell + I_n)^{-1}\right)_{\ell \in \mathbf{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vers la matrice nulle.

(e) En déduire la convergence de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$. Expliciter L^A.

14. Lorsque la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{P-}) : \ \mathcal{S}p(A) \subset \mathcal{O}^-$$

justifier la convergence de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$ et expliciter L^A.

15. On suppose ici que la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{P}) : \ \mathcal{S}p(A) \cap i\mathbf{R} = \emptyset.$$

(a) On suppose de plus dans cette question que la matrice A ne vérifie ni la propriété (P+) ni la propriété (P-). Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et deux matrices carrées C et D telles que :

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} P \ \text{ et } \ \mathcal{S}p(C) \subset \mathcal{O}^+ \ \text{ et } \ \mathcal{S}p(D) \subset \mathcal{O}^-.$$

(b) En déduire la convergence de la suite $\mathbf{U}^A = (U_\ell)_{\ell \in \mathbf{N}}$. Expliciter les valeurs propres de L^A.

Partie V

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose dans cette partie que la matrice A vérifie la propriété :

$$(\mathrm{Q}) : \ \mathcal{S}p(A) \cap \mathbf{R}^- = \emptyset.$$

On définit la matrice B dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{C})$ en posant :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Déterminer les valeurs propres de la matrice B en fonction des valeurs propres de A. On précisera leurs multiplicités en fonction des multiplicités des valeurs propres de A.

17. Justifier que la matrice B vérifie la propriété (P) (définie dans la partie IV) et en déduire que la suite $\mathbf{U}^B$ converge.

18. Démontrer que les termes de la suite $\mathbf{U}^B$ vérifient :

$$\forall \ell \in \mathbf{N}, \exists Y_\ell \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \ / \ U_\ell = \begin{pmatrix} 0 & AY_\ell \\ Y_\ell & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } Y_\ell \text{ est un polynôme en } A.$$

19. En déduire qu'il existe une matrice L dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$L^B = \begin{pmatrix} 0 & AL \\ L & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } AL = LA.$$

Démontrer de plus que L est un polynôme en A.

20. Démontrer qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{A}$ qui vérifie la propriété (P+) et telle que :

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = A.$$

21. Lorsque A est une matrice réelle symétrique (respectivement une matrice complexe hermitienne) définie positive, justifier l'existence de $\sqrt{A}$ et démontrer que $\sqrt{A}$ est une matrice réelle symétrique (respectivement une matrice complexe hermitienne) définie positive.

Partie VI

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

22. Justifier que $U_n(\mathbf{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

23. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$$

où N est l'application définie dans les préliminaires.

24. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Soit P_0 une matrice dans $U_n(\mathbf{R})$. Démontrer l'équivalence des assertions :

(a) $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$;

(b) $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ \mathrm{Tr}({}^tPM) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tP_0M)$;

(c) $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M + P) \leqslant N(M + P_0)$.

25. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique définie positive. Justifier que la seule matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ réalisant : $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$, est $P_0 = I_n$. On pourra exprimer, pour P dans $U_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{Tr}({}^tPM)$ sur une base bien choisie.

26. Réciproquement, soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - I_n) \leqslant N(M - P)$.

(a) On suppose M non symétrique. Justifier qu'il existe une matrice de rotation plane (dont la définition est rappelée dans le préambule) P telle que $\mathrm{Tr}(PM) > \mathrm{Tr}(M)$. En déduire que M est symétrique.

(b) Soit v un vecteur de $\mathbf{R}^n$ de norme 1. On note P_v la matrice $I_n - 2v\,{}^tv$.

i. Démontrer que $P_v \in U_n(\mathbf{R})$.

ii. Démontrer que $\mathrm{Tr}(P_vM) = \mathrm{Tr}(M) - 2 < v, Mv >$ où $<\ ,\ >$ désigne ici le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

(c) Démontrer que M est symétrique positive.

(d) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que la seule matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ réalisant : $\forall P \in U_n(\mathbf{R})$, $N(M - I_n) \leqslant N(M - P)$, est $P_0 = I_n$. Démontrer que M est symétrique définie positive.

27. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

(a) Justifier qu'il existe une matrice Q_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ telle que : $M = Q_0\sqrt{{}^tMM}$ (cf. question 21).

(b) Démontrer qu'une telle matrice Q_0 est l'unique matrice P_0 dans $U_n(\mathbf{R})$ qui vérifie : $\forall P \in U_n(\mathbf{R}),\ N(M - P_0) \leqslant N(M - P)$.

28. Pourrait-on avoir l'unicité d'un tel P_0 lorsque la matrice M n'est pas inversible ?

Partie VII

29. Soient A_0 et V_0 deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que A_0 est une matrice antihermitienne et V_0 une matrice unitaire. Soit γ l'application définie par :

$$\gamma \ : \ \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ t & \mapsto & V_0 \, \mathrm{e}^{tA_0} . \end{array}$$

Démontrer que γ est une application de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $U_n(\mathbf{C})$. Expliciter $\gamma(0), \gamma'(0)$ et $\gamma''(0)$.

30. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Soit η l'application définie par :

$$\eta \ : \ \begin{array}{rcl} U_n(\mathbf{C}) & \to & \mathbf{R} \\ V & \mapsto & \mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}(M^* V)) . \end{array}$$

Soit V_0 un maximum local de l'application η.

(a) Soit A_0 une matrice antihermitienne dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Justifier que :

i) $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Tr}(M^* V_0 A_0)) = 0$;

ii) $\mathrm{Re}\left(\mathrm{Tr}(M^* V_0 A_0^2)\right) \leqslant 0$.

(b) En déduire que $M^* V_0$ est une matrice hermitienne définie positive.

31. Soit M inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Justifier qu'il existe une unique matrice V_0 dans $U_n(\mathbf{C})$ telle que $M = V_0 \sqrt{M^* M}$.

FIN DU SUJET