Notations et objectifs

$\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$, $n \geqslant 2$.

$\mathrm{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

A^* désigne la matrice adjointe de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A = (a_{i,j})$ alors $A^* = (a'_{i,j})$ où $a'_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$.

$\mathbb{C}^n$ sera identifié à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Si $x \in \mathbb{C}^n$, on notera $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $x^* = (\overline{x_1} \dots \overline{x_n})$.

Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\Re e(z)$ sa partie réelle et $\Im m(z)$ sa partie imaginaire.

$\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dite normale si : $A\,A^* = A^*A$.

$U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si : $U\,U^* = U^*U = I_n$.

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux parties de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M} + \mathcal{N}$, l'ensemble des $z = x + y$ où $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{N}$. On note $\alpha\mathcal{M}$ l'ensemble des $\alpha\, x$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{M}$.

Les indications seront données en italique.

L'objet du problème est l'étude de propriétés de la partie de $\mathbb{C}$ notée $\mathcal{F}(A)$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, définie comme l'ensemble des nombres complexes x^*Ax où $x \in \mathbb{C}^n$ vérifie $x^*x = 1$.

I. Enveloppe convexe ; propriétés

Soit E un espace affine réel de dimension n. Étant donnés k points $A_1, \dots, A_k$ et k réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \neq 0$, on rappelle que le barycentre des points A_i affectés des coefficients α_i est l'unique point G tel que : $\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_k\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.

On adoptera dans la suite la notation : $G = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$ si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

On rappelle qu'une partie $\mathcal{P}$ de E est convexe si pour tous A, B de $\mathcal{P}$, et tout $u \in [0,1]$, le barycentre $(1-u)A + uB$ est dans $\mathcal{P}$.

1. Soient $A_0, \dots A_n$, $(n+1)$ points de E tels que l'ensemble des vecteurs $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ constitue une base de l'espace vectoriel associé à E. Montrer que, pour tout point M de E, il existe une famille unique de réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ telle que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ et $M = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i$.
2. On appelle **enveloppe convexe** d'une partie non vide $\mathcal{S}$ de E, l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant $\mathcal{S}$. Montrer que l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$ est convexe.
3. Montrer que l'ensemble des barycentres de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$ avec $A_i \in \mathcal{S}, \alpha_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, est convexe. Montrer que c'est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$.
On pourra utiliser l'associativité du barycentre.

4. Soit $G = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$ avec $A_i \in \mathcal{S}, \alpha_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.
   On suppose que $k > n + 1$.
   a. Si $(\overrightarrow{A_1 A_i})_{2 \leqslant i \leqslant h}$ où $2 \leqslant h < k$, est une famille libre maximale parmi les vecteurs $\overrightarrow{A_1 A_i}$, montrer qu'il existe une famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_h) \in \mathbb{R}^h$ telle que $A_{h+1} = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i A_i$ et $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$.
   b. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$G = (\alpha_1 + t\lambda_1)A_1 + \cdots + (\alpha_h + t\lambda_h)A_h + (\alpha_{h+1} - t)A_{h+1} + \cdots + \alpha_k A_k.$$
   c. En faisant varier t à partir de zéro, montrer que G peut être considéré comme le barycentre à coefficients positifs ou nuls de $(k-1)$ des points $A_1, \ldots, A_k$.
   d. En déduire que l'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{S}$ de E est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des familles de $(n+1)$ points de $\mathcal{S}$.
5. Soit $\mathcal{S}$ une partie compacte de E. Montrer que son enveloppe convexe est compacte.
   On pourra l'exprimer comme image d'une certaine application continue.

II. Exemples

On rappelle que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{F}(A) = \{x^* A x \,/\, x \in \mathbb{C}^n \text{ et } x^* x = 1\}$.

1. Déterminer $\mathcal{F}(A)$ dans les cas suivants :
   (i) $A = I_n$. (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, si A est une matrice diagonale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(A)$ est l'enveloppe convexe des éléments diagonaux de A.
3. Montrer que, pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.
4. Montrer que, si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,
   (i) $\mathcal{F}(A + \alpha I_n) = \mathcal{F}(A) + \{\alpha\}$ (ii) $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha \mathcal{F}(A)$.
5. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{F}(A)$ contient $\mathrm{Sp}(A)$ ainsi que les éléments diagonaux $a_{i,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de A.
6. a. Montrer que toute matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique $A = H(A) + iS(A)$ où $H(A)$ et $S(A)$ sont hermitiennes.
   b. Comparer $\mathcal{F}(H(A))$ et l'ensemble des $x = \Re e(z)$ lorsque z parcourt $\mathcal{F}(A)$.
7. Si A et B sont éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que : $\mathcal{F}(A + B) \subset \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B)$.
   A-t-on : $\mathcal{F}(A) + \mathcal{F}(B) \subset \mathcal{F}(A + B)$?
8. Si A et U sont éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et si U est unitaire, comparer $\mathcal{F}(U^* A U)$ et $\mathcal{F}(A)$.
9. Soit A une matrice normale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
   a. Avec les notations de 6.a. montrer que $H(A)$ et $S(A)$ commutent.
   b. Montrer que tout sous-espace propre de $H(A)$ est stable par $S(A)$ et que si s est l'endomorphisme canoniquement associé à $S(A)$, alors l'endomorphisme induit par s sur ce sous-espace vectoriel est diagonalisable dans une base orthonormale.
   c. En déduire l'existence d'une matrice unitaire $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U^* H(A) U$ et $U^* S(A) U$ soient diagonales.
   d. Comparer $\mathcal{F}(A)$ et l'enveloppe convexe de $\mathrm{Sp}(A)$.

Tournez la page S.V.P.

10. Si H est une matrice hermitienne de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer $\mathcal{F}(H)$ en fonction des valeurs propres de H. *On donnera une réponse faisant intervenir* $\min\big(\mathrm{Sp}(H)\big)$ et $\max\big(\mathrm{Sp}(H)\big)$.

III. Description de $\mathcal{F}(A)$ lorsque $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$

Dans toute cette partie III, à l'exception de la question 11, A désigne un élément de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

1. a. Montrer que l'on peut écrire $A = \lambda I_2 + M$ avec $\lambda \in \mathbb{C}, M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

   b. Montrer qu'il existe une matrice unitaire U de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $U^*MU = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & -\mu \end{pmatrix}$ avec $(\mu, \nu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. *On pourra utiliser II.6.a.*

2. Montrer qu'il existe $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, si $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $z_1 = e^{i\theta_1}$, $z_2 = e^{i\theta_2}$ alors $v^* \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \overline{\nu} & -\mu \end{pmatrix} v = 0$.

3. Montrer qu'il existe une matrice unitaire T de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $T^*AT = \lambda I_2 + a\,N + b\,N^*$ avec $(\lambda, a, b) \in \mathbb{C}^3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On note g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto g(z) = \lambda + az + b\overline{z}$.

4. Montrer que $\mathcal{F}(A) = g\big(\mathcal{F}(N)\big)$.

5. Montrer que g est affine et en déduire que $\mathcal{F}(A)$ est convexe.

6. On note σ l'application linéaire associée à g. Soit $u = \sigma(1)$ et $v = \sigma(i)$.
   Montrer que $\det(\sigma) = \Im m\,(\overline{u}\,v)$, puis exprimer $\det(\sigma)$ en fonction de $|a|$ et $|b|$.

7. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   - (i) $A\,A^* \neq A^*A$;
   - (ii) g est bijective ;
   - (iii) $|a| \neq |b|$.

8. On suppose les propriétés équivalentes de la question III.7. satisfaites. On pose :
$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \frac{1}{2} \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E} = g(\mathcal{C})$$
   a. Comparer $\mathcal{F}(A)$ et l'enveloppe convexe de $\mathcal{E}$. Comparer $\mathcal{E}$ et la frontière de $\mathcal{F}(A)$.

   b. On pose $a = |a|e^{i\alpha}$ et $b = |b|e^{i\beta}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :
$$\mathcal{E} = \left\{ z = \lambda + \frac{1}{2}\left[(|a| + |b|)\cos(\theta) + i(|a| - |b|)\sin(\theta)\right] \exp\left(i\,\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
   c. Déterminer la nature géométrique de la courbe $\mathcal{E}$ et montrer que les points de $\mathrm{Sp}(A)$ possèdent, vis à vis de $\mathcal{E}$, des propriétés géométriques remarquables que l'on précisera.
   On pourra examiner le polynôme caractéristique de A.

9. Caractériser par une propriété géométrique simple de l'ensemble $\mathcal{F}(A)$, chacune des cinq propriétés suivantes de la matrice A :
   - (i) A est normale ;
   - (ii) A possède une valeur propre double ;
   - (iii) A est unitaire ;
   - (iv) A est hermitienne ;
   - (v) A est scalaire (c'est à dire de la forme αI_2 avec $\alpha \in \mathbb{C}$).

10. Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que, si $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$, alors il existe une matrice unitaire U de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $B = U^* A\, U$.
11. Si A et B sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$. l'affirmation suivante est-elle exacte ?
Si $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$, alors il existe une matrice unitaire U de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = U^* A\, U$.
On pourra chercher des matrices diagonales.

IV. Cas général

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$ où $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. On note $A \oplus B$ la matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(A, B)$ élément de $\mathfrak{M}_{n+m}(\mathbb{C})$. Comparer $\mathcal{F}(A \oplus B)$ et l'enveloppe convexe de $\mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.
2. Construire $\mathcal{F}(A)$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$. *On prendra l'unité de longueur égale à 4 cm et l'on ne justifiera pas la construction proposée.*
3. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. **On se propose de montrer que $\mathcal{F}(A)$ est convexe**, c'est à dire que si $\alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, si $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ avec $x^* x = y^* y = 1$, alors $\alpha . x^* A\, x + (1-\alpha) . y^* A\, y \in \mathcal{F}(A)$.
Ce résultat a été établi lorsque $n = 2$ à la question III.5. On suppose donc $n \geqslant 3$.
a. Si $(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, montrer qu'il existe une matrice unitaire $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et un couple (v, w) de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tels que $x = Uv$, $y = Uw$ et que toutes les composantes de v et w d'ordre au moins égal à 3 soient nulles.
b. Conclure.
4. **Une application de la convexité de $\mathcal{F}(A)$.**
Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel hermitien de dimension n. Si x et y sont deux éléments de $\mathcal{V}$, on note $(x|y)$ le produit scalaire hermitien de x et y. Soit f un $\mathbb{C}$-endomorphisme de $\mathcal{V}$. On se propose de montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathcal{V}$ telle que : $\big(e_1|f(e_1)\big) = \cdots = \big(e_n|f(e_n)\big)$.
a. Montrer que l'on peut supposer que $\mathrm{tr}(f) = 0$. On fait cette hypothèse dans toute la suite de la question 4.
b. Soit A la matrice de f dans une base orthonormale quelconque de $\mathcal{V}$. Montrer que $0 \in \mathcal{F}(A)$. (*On pourra utiliser la question II.5.*) et en déduire l'existence d'un vecteur e_1 de $\mathcal{V}$ tel que $(e_1|e_1) = 1$ et $\big(e_1|f(e_1)\big) = 0$.
On note H l'orthogonal de e_1 dans $\mathcal{V}$ et p le projecteur orthogonal sur H. Soit f' l'endomorphisme de H défini par $f'(x) = \big(p \circ f\big)(x)$.
c. Montrer que, si $x \in H$, on a $\big(x|f'(x)\big) = \big(x|f(x)\big)$.
d. Conclure.

5. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $H(e^{i\theta}A) = \dfrac{1}{2}\Big(e^{i\theta}A + e^{-i\theta}A^*\Big)$.

   $H(e^{i\theta}A)$ est une matrice hermitienne.

   a. S'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $H(e^{i\theta}A)$ soit une matrice définie positive, déduire des résultats de la partie II. que 0 n'est pas élément de $\mathcal{F}(A)$.

   b. Si $\mathcal{C}$ est une partie convexe compacte, non vide de $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$, montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ ne contenant pas α, qui sépare α et $\mathcal{C}$ *ie.* (telle que le demi-plan ouvert limité par $\mathcal{D}$, contenant α, ne rencontre pas $\mathcal{C}$). *On pourra considérer* $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+, z \mapsto |z - \alpha|$.

   c. Supposons que 0 n'appartienne pas à $\mathcal{F}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $H(e^{i\theta}A)$ soit une matrice définie positive.

V. Caractérisation

L'application $\mathcal{F}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans l'ensemble des parties de $\mathbb{C}$ a les propriétés suivantes :

(1) Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}(A)$ est une partie convexe compacte de $\mathbb{C}$.

(2) $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(A + \alpha I_n) = \mathcal{F}(A) + \{\alpha\}$ et $\mathcal{F}(\alpha A) = \alpha\,\mathcal{F}(A)$.

(3) $\mathcal{F}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re e(z) \geqslant 0\}$ si, et seulement si, la matrice $A + A^*$ est positive.

(1) et (2) ont été prouvées dans les questions II.3, II.4 et IV.3.

(3) est immédiate et n'est pas à démontrer.

Soient deux applications $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés (1), (2) et (3). Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$; on suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta \in \mathcal{F}_1(A)$ et $\beta \notin \mathcal{F}_2(A)$.

1. Déduire de la question IV.5.b. l'existence d'une droite $\mathcal{L}$ du plan complexe séparant le point β et $\mathcal{F}_2(A)$.
2. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha_1 \neq 0$ tel que :
$$\Re e(\alpha_1\beta + \alpha_2) < 0 \text{ et } \alpha_1\mathcal{F}_2(A) + \{\alpha_2\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,/\, \Re e(z) \geqslant 0\}$$
3. En déduire une contradiction.
4. Conclure.