Notations, rappels et présentation du problème

- ▷ On note $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les ensembles de nombres usuels : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels et nombres complexes.

- ▷ Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul fixé et $\mathbb{K}$ désigne un corps égal à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ▷ Si A est une partie de B (*i.e.* $A \subset B$), on note $B - A$ le complémentaire de A dans B.

- ▷ Si p et q sont deux entiers relatifs, on pose $[\![p, q]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant k \leqslant q\}$.

- ▷ $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$; pour tout entier naturel d, on note $\mathbb{K}_d[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d.

- ▷ Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \wedge Q$ le p.g.c.d. de P et Q ; par définition, lorsqu'il n'est pas nul, ce polynôme est unitaire.

- ▷ On identifie $\mathbb{K}^n$ avec le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes de taille n.

- ▷ $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices carrées de taille n et l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$; $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre, *i.e.* $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau ; $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ un groupe.

- ▷ $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{R}-$algèbre par restriction de la loi externe aux nombres réels.

- ▷ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

- ▷ Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, on note $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$ la matrice de u relativement à la base $\mathscr{B}$.

- ▷ Soit $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est noté $\det(A)$ ou

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

- ▷ Pour tout $v = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on pose $\overline{v} = (\overline{x_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

- ▷ Pour toute matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice $[\overline{a_{i,j}}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- ▷ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A (I_n désigne la matrice unité de taille n). Ce polynôme est unitaire de degré n.

- ▷ Si E désigne un ensemble quelconque, on dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ est involutive lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2, \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Pour cela, on commencera par montrer que cette assertion est équivalente à l'assertion (2) :

$$\forall C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Une démonstration directe sera proposée en dernière partie.

Partie I : résultats préliminaires

On fixe deux matrices A et B, éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer l'assertion (1) dans le cas où $n = 1$.

2. Étude de la conjugaison dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\overline{Av} = \overline{A}\overline{v}$.

b) Montrer que l'application : $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ A \longmapsto \overline{A} \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$−algèbre involutif.

c) Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.

d) En déduire que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(A\overline{A}\right) \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < \eta \implies A - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

b) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

4. On suppose dans cette question que A est inversible.

a) Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \overline{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.

b) En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *à déterminer* telle que :

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det\left(I_n + C\overline{C}\right).$$

5. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

Partie II : démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère : $\Omega = \{C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.
Soit $C \in \Omega$.

6. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$.

- **a)** Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
  Indication : on pourra montrer que AB et BA sont semblables.
- **b)** Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
  Indication : on pourra utiliser la question 3.b.
- **c)** Montrer que $\chi_{C\overline{C}} \in \mathbb{R}[X]$.

7. Montrer que $C\overline{C}$ est diagonalisable. Que dire de la dimension des sous-espaces propres ?

8. Soient λ une valeur propre *réelle* de $C\overline{C}$ et $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

- **a)** Montrer que $\overline{C}C\overline{v} = \lambda\overline{v}$.
- **b)** En calculant $C\overline{C}C\overline{v}$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $C\overline{v} = \mu v$.
- **c)** Calculer $C(\overline{\mu}\,\overline{v})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

9. Montrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}_+$.

Partie III : résultant de deux polynômes

Soit $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$ un couple d'entiers naturels non nuls.
Soient $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k X^k \in \mathbb{K}_q[X]$ un polynôme de degré q et $Q = \displaystyle\sum_{l=0}^{r} b_l X^l \in \mathbb{K}_r[X]$ un polynôme de degré r.

On pose :

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{3.5cm}}^{r} \qquad \overbrace{\hspace{3.5cm}}^{q} \\ \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_q & \vdots & & a_1 & \vdots & \vdots & & b_1 \\ 0 & a_q & \ddots & \vdots & b_r & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & b_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_q & 0 & \cdots & 0 & b_r \end{vmatrix} \end{array} \in \mathbb{K}.$$

$\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)$ est appelé résultant de P et Q. C'est le déterminant d'une matrice carrée de taille $q+r$, appelée matrice de Sylvester et notée $\mathrm{Syl}(P,Q)$.

On pose $\mathscr{B} = \left((1,0),(X,0),\dots,(X^{r-1},0),(0,1),(0,X),\dots,(0,X^{q-1})\right)$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{can}} = \left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant q+r-1}$.

On considère enfin l'application φ: $\begin{cases} \mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ (U,V) \longmapsto PU+QV \end{cases}$.

10. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{r-1}[X]\times\mathbb{K}_{q-1}[X]$.

11. Montrer que φ est une application linéaire.

12. Expliciter sa matrice M relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$.

13. On suppose que $P\wedge Q = 1$.

a) Montrer que φ est injective.

b) En déduire que $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)\neq 0$.

14. On suppose que $P\wedge Q\neq 1$.
Montrer que φ n'est pas injective, puis que $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)=0$.

Ainsi, on a démontré que : $P\wedge Q = 1$ si et seulement si $\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q)\neq 0$.

On pose : $\Delta(P) = \dfrac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q}\mathrm{Res}_{\mathbb{K}}\,(P,P')$, où P' désigne le polynôme dérivé de P. $\Delta(P)$ est appelé discriminant de P.

15. On suppose ici que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2+bX+c$. Calculer $\Delta(P)$.

16. On suppose ici que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et par conséquent que $P\in\mathbb{C}[X]$. Montrer que P est scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P)\neq 0$.

Partie IV : quelques résultats sur les fonctions polynômiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$ est polynômiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbb{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k\in S}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall (x_1,x_2,\dots,x_d)\in\mathbb{C}^d,\quad P(x_1,x_2,\dots,x_d) = \sum_{(k_1,\dots,k_d)\in S} a_{(k_1,\dots,k_d)}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_d^{k_d}.$$

Soit P une fonction polynômiale.

En reprenant les notations précédentes, on pose : $Z_P = \left\{(x_k)_{1\leqslant k\leqslant d}\in\mathbb{C}^d \;\middle|\; P(x_1,x_2,\dots,x_d)=0\right\}$.

17. **a)** Soient I_1, I_2, ..., I_d des parties infinies de $\mathbb{C}$. On suppose que $I_1\times I_2\times\cdots\times I_d\subset Z_P$. Montrer que P est la fonction polynômiale nulle, *i.e.* que tous ses coefficients sont nuls.
Indication : on pourra procéder par récurrence sur d.

b) En déduire que si $P\neq 0$, alors Z_P est un fermé d'intérieur vide, puis que $\mathbb{C}^d\backslash Z_P$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}^d$.

On rappelle que : $\Omega = \{C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_{C\overline{C}} \text{ est un polynôme scindé à racines simples}\}$.

18. À l'aide du discriminant, montrer que Ω est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

19. Démontrer l'assertion (2).
Indication : on pourra utiliser les résultats de la partie II.

20. **a)** Montrer plus généralement que, pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \det(\lambda I_n + C\overline{C}) \geqslant 0.$$

b) En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

c) En déduire que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'image d'une matrice réelle par l'application exponentielle alors les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

Partie V : autre manière d'introduire le résultant

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $D \neq 0$.

Pour tout polynôme U, on note $\mathrm{quo}_D(U)$ (*resp.* $\mathrm{rem}_D(U)$) le quotient (*resp.* le reste) de la division euclidienne de U par D.

21. Montrer que quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$ et que rem_D est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

On reprend les notations de la partie III. On note (Q) l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par Q et on pose $E = \mathbb{K}[X]/(Q)$.

Pour tout $U \in \mathbb{K}[X]$, on note $\overline{U}$ la classe de U modulo Q.

22. Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r et que $\mathscr{B}_0 = \left(\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X}^{r-1}\right)$ en est une base.

23. On considère l'endomorphisme : $f\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ \overline{U} \longmapsto \overline{PU} \end{cases}$.

D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, il existe un unique couple (U_j, R_j) appartenant à $\mathbb{K}[X]^2$ tel que $X^j P = QU_j + R_j$ et $\deg(R_j) \leqslant r-1$.

On note $\tilde{R}$ la matrice de la famille $(R_0, R_1, \dots, R_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$.

a) Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel E si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

b) Exprimer la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_0}(f)$ de f relativement à la base $\mathscr{B}_0$ à l'aide de $\tilde{R}$.

24. On considère l'endomorphisme $\tilde{f}\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ \quad S \quad \longmapsto P \times \mathrm{rem}_Q(S) + Q \times \mathrm{quo}_Q(S) \end{cases}$.

a) Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f}$ est bien défini.

b) Pour tout $(U, V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\tilde{f}(U + QV)$.

c) Montrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (1, X, X^2, \dots, X^{r-1}, Q, XQ, \dots, X^{q-1}Q)$ est une base de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

d) À l'aide de la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_1}\left(\tilde{f}\right)$, montrer que $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

25. On considère maintenant les endomorphismes :

$$\xi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ \quad S \quad \longmapsto P \times \operatorname{rem}_{X^r}(S) + Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S) \end{cases}$$

et

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{q+r-1}[X] \\ \quad S \quad \longmapsto \operatorname{rem}_{X^r}(S) + Q \times \operatorname{quo}_{X^r}(S) \end{cases}.$$

On note $\mathscr{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{K}_{q+r-1}[X]$.

a) Pour tout $(U,V) \in \mathbb{K}_{r-1}[X] \times \mathbb{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\xi(U + X^r V)$ et $\psi(U + X^r V)$.

b) Déterminer $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\xi)$ et $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_{\text{can}}}(\psi)$.

c) Montrer que ψ est un automorphisme.

d) Exprimer $\tilde{f}$ en fonction de ξ et ψ.

26. Montrer que : $\operatorname{Res}_{\mathbb{K}}(P,Q) = b_r^q \det(f)$.

Partie VI : autre preuve de l'assertion (1)

27. Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

b) Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

28. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Démontrer que le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{R}[X]$.

29. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ dont on écrira les éléments sous la forme : $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $(X,Y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Soit $\theta\colon \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} \end{cases}.$

a) Démontrer que θ est une application $\mathbb{R}-$linéaire et que θ commute avec tous les endomorphismes de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

b) Que vaut $\theta \circ \theta$?

c) Soit $v \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ non nul. Démontrer que v et $\theta(v)$ sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{C}$) et que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ est stable par θ (où $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v))$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ engendré par v et $\theta(v)$).

d) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ stable par θ et soit $v \notin E$.
Démontrer que : $E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

30. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.
On désigne par E_λ le sous-espace propre associé et par E'_λ le sous-espace caractéristique associé.

a) Démontrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ et que : $\theta(E'_\lambda) = E'_{\overline{\lambda}}$.

b) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\dim_{\mathbb{C}} E'_\lambda$ est paire.

31. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}_+$.

——— FIN DU SUJET ———