Devoir 2

Agrégation interne 2013/2014

ENS de Lyon 2010

2ème concours

Question 1 à 9

Le problème porte sur le "quotient de Rayleigh" d'une matrice symétique. Voir le théorème de Courant-Fisher dans les notes de cours d'algèbre linéaire - Ch. 2, pp 12, 13, 14.

Théorème [Courant-Fisher]

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne, de valeurs propres

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

et soit k, $1 \leq k \leq n$. Alors la valeur propre λ_k est donnée par chacune des deux formules

$$\lambda_k = \min_{w_1, \dots w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \; \max_{\substack{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp (w_1, w_2 \dots w_{n-k})}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

et

$$\lambda_k = \max_{w_1, \dots w_{k-1} \in \mathbb{C}^n} \; \min_{\substack{x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n \\ x \perp (w_1 \dots w_{k-1})}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

Indications sur la correction

1), 2), 3) : On a ici $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

Décomposition de Schur de A : il existe Q orthogonale $Q = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$ t.q.

$$Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

Pour $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i$

$$\|x\|^2 = \sum \alpha_i^2, \qquad (Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$

Quotient de Rayleigh de A appliqué à $x \neq 0$:

$$\frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}, \quad \text{On a donc}$$

$$\underbrace{\min \lambda_i}_{\lambda_1} \frac{\sum \alpha_i^2}{\underbrace{\sum \alpha_i^2}_{1}} \leqslant \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \leqslant \underbrace{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i}_{\lambda_n} \frac{\sum \alpha_i^2}{\underbrace{\sum \alpha_i^2}_{1}}$$

c.a.d :

$$\lambda_1 \leqslant \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2} \leqslant \lambda_n$$

De plus en considérant $x = v_1$, puis $x = v_n$, on obtient

$$\lambda_1 = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2}, \quad \lambda_n = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax,x)}{\|x\|^2}$$

3) a) Raisonner sur les dimensions :

$\dim F = k$

$\dim \mathrm{Vect}(v_k \dots v_n) = n - k + 1$

$\Rightarrow$ F et $\mathrm{Vect}(v_k, \dots v_n)$ ne peuvent être en somme directe

b) Soit $\tilde{x} \neq 0$ dans l'intersection de F et $\mathrm{Vect}(v_k \dots v_n)$

$\tilde{x} = \alpha_k v_k + \dots + \alpha_n v_n$

On a $$\frac{\tilde{x}^T A \tilde{x}}{\|\tilde{x}\|^2} = \frac{\lambda_k \alpha_k^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2}{\alpha_k^2 + \dots + \alpha_n^2} \geqslant \lambda_k$$

donc $$\max_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \geqslant \lambda_k$$

donc en passant au min sur les $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim F = k$, on obtient

$$\min_{F \in \mathcal{V}_k} \max_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \geqslant \lambda_k$$

Réciproque : On prend $\tilde{F} = \mathrm{Vect}(v_1 \dots v_k)$

$$\min_{F \in \mathcal{V}_k} \max_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{\|x\|^2} \leqslant \max_{\substack{x \in \tilde{F} \\ x \neq 0}} \frac{x^T A x}{\|x\|^2} = \lambda_k$$

4) On a $A = Q \, \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) Q^T$

car $QQ^T = Q^T Q = Id$ (Q est orthogonale)

On définit B par

$$B = Q \, \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1} \dots \sqrt{\lambda_n}) Q^T$$

5) Unicité de B : Si B' est une autre racine carrée de A, on a :

$$AB' = B'^2 B' = B'^3 = B' B'^2 = B' A$$

Donc B' et A commutent et elles sont donc diagonalisables dans une même base. Soit E_k le sous-espace propre associé à λ_k. L'espace E_k est stable par B' car $AB'x = B'Ax = B'\lambda_k x = \lambda_k B'x$

donc $B'x \in E_k$ pour tout $x \in E_k$.

Donc $B'_{/E_k} = \sqrt{\lambda_k} \, Id$. C'est à dire

$B'_{/E_k} = B_{/E_k}$ et donc $B' \equiv B$.

6) Les valeurs propres de AB sont les mêmes que celles de $\sqrt{B}A\sqrt{B}$ car

$$AB = \sqrt{B}^{-1}\sqrt{B}\,A\,\sqrt{B}\sqrt{B} \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned}\chi_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda I)\\ &= \det(\sqrt{B}^{-1}\sqrt{B}A\sqrt{B}\sqrt{B} - Id)\\ &= \det(\sqrt{B}^{-1}\sqrt{B}A\sqrt{B}\sqrt{B} - \sqrt{B}^{-1}\sqrt{B})\\ &= \det(\sqrt{B})^{-1}\det(\sqrt{B}A\sqrt{B} - I)\det(\sqrt{B})\\ &= \chi_{\sqrt{B}A\sqrt{B}}(\lambda).\end{aligned}$$

$\sqrt{B}A\sqrt{B}$ symétrique définie positive $\Rightarrow \lambda > 0$ pour toute valeur propre λ de AB

7) Pour $x \neq 0$, on écrit :

$$\frac{(\sqrt{B}A\sqrt{B}x, x)}{\|x\|^2} = \frac{(\sqrt{B}A\sqrt{B}x, x)}{(\sqrt{B}x, \sqrt{B}x)} \frac{(\sqrt{B}x, \sqrt{B}x)}{\|x\|^2}$$

$$\leqslant \frac{(Ay, y)}{\|y\|^2}\lambda_n(B) \quad \text{avec } y = \sqrt{B}x$$

donc pour tout $x \neq 0$, $x \in F$, $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(F) = k$ en passant au max en y, puis à gauche au max en x :

$$\max_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{B}A\sqrt{B}x, x}{\|x\|^2} \leqslant \max_{y\in\sqrt{B}F} \frac{(Ay, y)}{\|y\|^2}\lambda_n(B)$$

En passant au min à gauche (sur F)

$$\lambda_k(\sqrt{B}A\sqrt{B}) \leqslant \max_{y\in\sqrt{B}F} \frac{(Ay, y)}{\|y\|^2}\lambda_n(B)$$

Finalement on passe au min sur F (ou sur $\sqrt{B}F$ car $F \mapsto \sqrt{B}F$ est une bijection entre sev de dim k !

Ça donne l'inégalité de droite
$$\lambda_k(AB) \leq \lambda_k(A)\, \lambda_n(B)$$
De même pour l'inégalité de gauche.

8). C'est vrai : on obtient ce même résultat par perturbation :

Pour tout $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon I$ et $B + \varepsilon I$ sont symétriques définis positives. Donc

$$\lambda_i(A+\varepsilon I)\, \lambda_1(B+\varepsilon I) \leq \lambda_i\big((A+\varepsilon I)(B+\varepsilon I)\big)$$
$$\leq \lambda_i\big((A+\varepsilon I)\big)\, \lambda_n(B+\varepsilon I)$$

On fait tendre ensuite $\varepsilon \to 0$. Préciser le raisonnement.