SESSION 2009

2nd concours

MATHÉMATIQUES

École normale supérieure de Lyon

Durée : 3 heures

Ce livret comprend 4 pages numérotées de 1 à 4

Le sujet comprend deux exercices qui sont indépendants. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff) Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uples $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Pour x appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

et pour x et y appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

le produit scalaire de x et y.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A et pour A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B]$ le commutateur de A et B défini par

$$[A, B] = AB - BA.$$

Pour A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ on note enfin $\sigma(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de A, et $\rho(A)$ le rayon spectral de A, c'est-à-dire le plus grand des modules des éléments de $\sigma(A)$.

Première partie : une norme sur $M_n(\mathbb{R})$

Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

1. Montrer que l'application qui à A associe $\|A\|$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

3. Montrer que

$$\|A\| = \sqrt{\rho(AA^T)}.$$

   Indication : On commencera par montrer que $\|A\| \geq \sqrt{\rho(AA^T)}$ en choisissant un vecteur particulier de $\mathbb{R}^n$.

4. (a) Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$

   (b) Comparer $\|AB\|$ et $\|BA\|$ si A et B sont symétriques.

   (c) Montrer que, si $n \geq 2$, l'application qui à $(A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ associe $(\|AB\|, \|BA\|) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est surjective.

Deuxième partie : Exponentielle de matrices

5. On munit désormais $M_n(\mathbb{R})$ de la norme précédente. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, montrer que la série
$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{j!}$$
converge dans $M_n(\mathbb{R})$. On note $\exp A$ sa somme.

6. Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, on suppose que A et B commutent, montrer que
$$\exp(A+B) = \exp A \exp B.$$
En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible.

7. On suppose que A est une matrice symétrique, montrer en utilisant les résultats de la première partie que
$$\|\exp A\| \leq e^{\rho(A)}.$$

8. Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, montrer que l'application qui à t associe $\exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée. Cette application est-elle de classe C^∞ ?

Troisième partie : Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

9. On se donne dans cette partie deux matrices A et B telles que $[A, B]$ commute avec A et B. Montrer en utilisant la question 8 que pour tout t réel, on a
$$\exp(-tA)AB\exp(tA) = AB + t[B, A]A.$$

10. En déduire que
$$[\exp(-tA), B] = t[B, A]\exp(-tA).$$

11. Calculer la dérivée de l'application qui à t associe
$$\exp(-tA)\exp(-tB)\exp t(A+B).$$

12. En déduire la formule de Baker-Campbell-Hausdorff
$$\exp(A+B) = \exp A \exp B \exp([B, A]/2).$$

13. Construire un exemple dans $M_3(\mathbb{R})$ de deux matrices A et B telles que $[A, B]$ commute avec A et B sans que $[A, B]$ soit la matrice nulle.

Exercice 2 (Points de discontinuité d'une fonction croissante) Soit f une fonction croissante d'un intervalle ouvert non vide de I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à I la fonction f admet une limite à gauche et une limite à droite. On note respectivement $f(x_-)$ et $f(x_+)$ ces deux limites.

2. Montrer que
$$f(x_-) = \sup\{f(y)\,;\, y < x\}$$
et
$$f(x_+) = \inf\{f(y)\,;\, y > x\}$$

3. Soit x appartenant à I, donner une condition nécessaire et suffisante sur $f(x_-)$ et $f(x_+)$ pour que la fonction f soit discontinue en x.

4. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f sur I est fini ou dénombrable.

   Indication : On pourra construire une application injective associant à tout point de discontinuité de f un rationnel.

5. On se donne une suite finie de I, construire une fonction croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement cette suite finie.

6. On se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I. En considérant la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ qui à x associe
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} 1_{[x_n,+\infty[}(x),$$
montrer qu'il existe une fonction croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est exactement la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.