Université de Lorraine - Site de Metz - UFR MIM **Année 2012/2013**
Master de Mathématiques, année M1
Module *Introduction à l'analyse des données*

Exercices - Feuille 3

Diagonalisation d'une matrice symétrique, valeurs singulières d'une matrice

1- Normes matricielles
1) Soit $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Rappeler la définition des normes matricielles $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_2$.
2) Montrer que pour chacune de ces normes matricielles on a

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \tag{1}$$

(attention: les trois normes qui interviennent portent en général sur des espaces différents !).
3) Soit la norme matricielle

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{i,j}| \tag{2}$$

Montrer que cette norme ne vérifie pas (1). On pourra considérer les matrices A et B données par

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

4) Vérifier les relations suivantes. On rappelle que la norme de Frobenius est définie par

$$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2)^{1/2} \tag{4}$$

1.
$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \tag{5}$$

2.
$$\max_{i,j} |a_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{i,j}| \tag{6}$$

3.
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \tag{7}$$

4.
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \tag{8}$$

5.
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty \tag{9}$$

6.
$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1. \tag{10}$$

2- Matrices symétriques et formes quadratiques
1) Rappeler le théorème de diagonalisation des matrices symétriques.
2) Soit A une matrice symétrique définie positive, qui s'écrit
$$A = P\Lambda P^T \tag{11}$$
avec P matrice orthogonale et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \cdot, \lambda_n)$. Exprimer A^{-1} en fonction de P et Λ.
3) Comment définir $A^{1/2}$?
4) Rappeler le lien entre matrices carrées symétriques $n \times n$ et formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.
5) Montrer que pour toute forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, il existe une base orthonormée e'_i dans laquelle q s'exprime par
$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2, \tag{12}$$
où y_i désigne les coordonnées du vecteur x dans la base e'_i.
6) Soit A et B deux matrices $n \times n$, A symétrique et B symétrique définie positive. Montrer que le maximum de $x^T Ax$ sous la contrainte $x^T Bx = 1$ est donné par la plus grande valeur propre de $B^{-1}A$. De plus, le vecteur qui réalise le maximum est un vecteur propre associé à cette plus grande valeur propre.

3- Calcul de la norme 2 matricielle
1) Rappeler le théorème de décomposition spectrale d'une matrice symétrique réelle.
2) Démontrer que $\|A\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A, c'est-à-dire
$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, \lambda_i \text{valeur propre de A}\}. \tag{13}$$
3) Rappeler le théorème de décomposition en valeurs singulières d'une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
4) Démontrer que la norme matricielle $\|A\|_2$ coincide avec la plus grande valeur singulière de A. Autrement dit: pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il existe un vecteur $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|z\|_2 = 1$ avec
$$A^T Az = \mu^2 z \tag{14}$$
où $\mu = \|A\|_2$.
5) Montrer qu'une majoration de $\|A\|_2$ est
$$\|A\|_2 \leq (\|A\|_1 \|A\|_\infty)^{1/2}. \tag{15}$$

4- Valeurs singulières et valeurs propres
Soit X une matrice $n \times p$, (par exemple une matrice de donnéees correspondant à un échantillon de n observations avec p caractères.). Soit r le rang de X. Montrer que pour tout $k \leq r$, la valeur propre numéro k des matrices $X^T X$ et XX^T sont les mêmes. On ordonne les valeurs propres sous la forme
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0, \quad \text{où } r \text{ est le rang de } X. \tag{16}$$

Montrer que l'on passe des vecteurs propres $u_k \in \mathbb{R}^p$ de $X^T T$ à ceux v_k de XX^T correspondant à la valeur propre λ_k par
$$v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X u_k \tag{17}$$
et
$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X^T v_k. \tag{18}$$